Devoir Surveillé
Le second degré

Exercice 1 : **(12 points)**

$$P(x) = 3x^2 - 11x + 9 \quad ; \quad Q(x) = x^2 - x + 1 \quad \text{et} \quad R(x) = -x^2 - 16 + 8x$$

PARTIE A :

1. **a.** $P(x) = 0 : \Delta = b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4 \times 3 \times 9 = 13 > 0$

D'où $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{11-\sqrt{13}}{6}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{11+\sqrt{13}}{6}$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est $\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \dfrac{11-\sqrt{13}}{6} ; \dfrac{11+\sqrt{13}}{6} \right\}}$

b. $Q(x) = 0 : \Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$. Donc il n'y a pas de solutions réelles à l'équation.

Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation est $\boxed{\mathscr{S} = \emptyset}$

2. Pour trouver les racines éventuelles de R, on résout l'équation $R(x) = 0$.

Or $-x^2 - 16 + 8x = -(x^2 - 8x + 16) = -(x-4)^2$ (identité remarquable).

Ainsi il est clair que admet **une racine double** $x_0 = 4$

3. $P(x) = 3\left(x - \dfrac{11-\sqrt{13}}{6}\right)\left(x - \dfrac{11+\sqrt{13}}{6}\right)$ Q n'admet pas de forme factorisée, $R(x) = -(x-4)^2$

4.

x	$-\infty$		$\frac{11-\sqrt{13}}{6}$		$\frac{11+\sqrt{13}}{6}$		$+\infty$
Signe de P ($a > 0$)		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de Q ($a > 0$)		$+$	

x	$-\infty$		4		$+\infty$
Signe de R ($a < 0$)		$-$	0	$-$	

5. **a.** $P(x) \leq 0 : \boxed{\mathscr{S} = \left[\dfrac{11-\sqrt{13}}{6} ; \dfrac{11+\sqrt{13}}{6} \right]}$

b. $Q(x) \leq 0 : \boxed{\mathscr{S} = \emptyset}$

c. $R(x) \leq 0 : \boxed{\mathscr{S} = \mathbb{R}}$

PARTIE B :

1. On cherche d'abord x tel que $P(x) = Q(x)$. Or ceci équivaut à :

$$3x^2 - 11x + 9 = x^2 - x + 1 \iff \ldots \iff 2x^2 - 10x + 8 = 0$$

$\Delta = \ldots = 36 > 0$ donc $x_1 = \ldots = \dfrac{10+\sqrt{36}}{4} = 4$ et $x_2 = \ldots = \dfrac{10-6}{4} = 1$

Ensuite on cherche les ordonnées correspondants à ces deux points : $Q(4) = \ldots = 13$ $Q(1) = 1$

Donc les points d'intersection des paraboles sont $\boxed{A(4 ; 13) \text{ et } B(1 ; 1)}$

2. On établit le tableau de signe de la différence $P(x) - Q(x) = 2x^2 - 10x + 8$:

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
Signe de P ($a > 0$)		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que la parabole $\mathscr{P}$ est au dessus de la parabole $\mathscr{Q}$ pour $\boxed{x \in]-\infty ; 1[\cup]4 ; +\infty[}$

Exercice 2 : **(4 points)**

On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction polynôme du second degré P.

x	$-\infty$	-1	0	3.5	8	$+\infty$
Variations de P		0	2	$\frac{81}{16}$	0	

1. Il est clair que P peut s'écrire sous la forme $\mathrm{P}(x) = a(x+1)(x-8)$.
   Or $\mathrm{P}(0) = 2$ donc $a(0+1)(0-8) = 2 \iff a = -\frac{1}{4}$ D'où $\boxed{\mathrm{P}(x) = -\frac{1}{4}(x+1)(x-8)}$
2. La courbe représentative de P admet un axe de symétrie vertical passant par son sommet.
   Or $\mathrm{P}(-1) = \mathrm{P}(8) = 0$ on en déduit que l'abscisse du sommet est $\frac{-1+8}{2} = 3.5$
   Son ordonnée est donc $\mathrm{P}(3.5) = -\frac{1}{4}(3.5+1)(3.5-8) = \ldots = \frac{81}{16}$. On peut donc compléter le tableau.
3. La forme canonique de P est $\mathrm{P}(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $(\alpha\,;\,\beta)$ les coordonnées du sommet de la parabole représentative de P. Ainsi $\boxed{\mathrm{P}(x) = -\frac{1}{4}(x-3.5)^2 + \frac{81}{16}}$

Exercice 3 : **Probabilité et second degré** **(4 points)**

1. Dans l'urne il y a donc en tout $m+6$ boules. D'où :

$$\mathrm{P(J)} = \frac{3}{m+6} \quad ; \quad \mathrm{P(B)} = \frac{2}{m+6} \quad ; \quad \mathrm{P(R)} = \frac{1}{m+6} \quad ; \quad \mathrm{P(V)} = \frac{m}{m+6}$$

2. **a.**

x_i	10	$-1-2m$	$5m$	**Total**
$\mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i)$	$\frac{1}{m+6}$	$\frac{5}{m+6}$	$\frac{m}{m+6}$	1

b. $\mathrm{E}(x) = 10 \times \frac{1}{m+6} + (-1-2m) \times \frac{5}{m+6} + 5m \times \frac{m}{m+6} = \ldots = \frac{5-10m+5m^2}{m+6}$

On cherche donc m tel que :

$$\frac{5-10m+5m^2}{m+6} = 4.5 \overset{m\neq -6}{\iff} 5-10m+5m^2 = 4.5(m+6) \iff \ldots \iff 5m^2 - 14.5m - 22 = 0$$

$\Delta = \ldots = 650.25$ donc $m_1 = \frac{14.5+25.5}{10} = 4$ et $m_2 = \ldots = -1.1 < 0$.

m désigne un nombre de boules, donc il ne peut pas être positif. On trouve donc $\boxed{m = 4}$

Exercice 4 : **Question Cactus**

On appelle x la vitesse de l'automobiliste à l'aller et t_A le temps mis à l'aller, t_R son temps au retour.

On a alors $t_\mathrm{A} = \frac{150}{x} \iff t_\mathrm{R} = \frac{150}{x+25} \quad t_\mathrm{A} + t_\mathrm{R} = 5$

On doit alors résoudre l'équation $\frac{150}{x} + \frac{150}{x+25} = 5 \ldots$