

CHAPITRE 9

LA SUITE DES SUITES !



HORS SUJET



TITRE : « Ashgar Farhadi »

AUTEUR : UNE SÉPARATION

PRÉSENTATION SUCCINCTE : Ashgar Farhadi a fait ses études de théâtre, avec un diplôme du 1er cycle en arts dramatiques et une maîtrise de mise en scène théâtrale à l'Université de Téhéran et l'Université Tarbiat Modarres. Farhadi a tourné des courts métrages de 8 mm et 16 mm au Département de la société du cinéma de jeunesse d'Ispahan avant d'entamer l'écriture des pièces de théâtre et des scénarios pour la télévision iranienne, IRIB. *Danse dans la poussière* est son premier film réalisé, suivi par le film acclamé par les critiques, *Les enfants de Belle Ville*. Son troisième film, *La Fête du feu* obtient le Hugo d'or au Festival international du film de Chicago en 2006. À propos d'*Elly*, pour lequel il reçoit l'Ours d'argent du meilleur réalisateur à Berlin en 2009, prend pour sujet le voyage d'un groupe d'Iraniens au bord de la mer Caspienne tournant à la catastrophe. En 2011, Farhadi revient à la Berlinale pour y présenter *Une séparation*. Le film gagne l'Ours d'or et les Prix d'interprétation féminine et masculine pour l'ensemble de la distribution. Puis il reçoit, en 2012, le Golden Globe, le César et l'Oscar du meilleur film étranger.

Document réalisé à l'aide de \LaTeX

Auteur : C. Aupérin

Site : wicky-math.fr/nf

Lycée Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

I) Suite Arithmétique	2
I.1. Découverte des suites arithmétiques au travers d'un exemple	2
I.2. Définition	2
I.3. Expression explicite en fonction de n	3
I.4. Somme de termes successifs	4
II) Suite Géométrique	8
II.1. Découverte des suites géométriques au travers d'un exemple	8
II.2. Définition	8
II.3. Expression explicite en fonction de n	9
II.4. Somme de termes successifs	10
II.5. Convergence	12

L'ESSENTIEL :

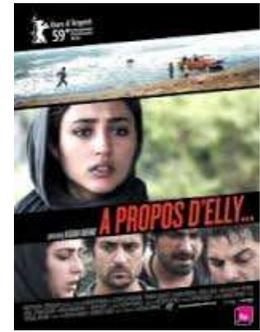
- ↪ Calculer les termes d'une suite générée par récurrence.
- ↪ Construire et exploiter la représentation graphique d'une suite définie par récurrence
- ↪ Algorithme

« Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée ! »

JOHN LOUIS VON NEUMANN

CHAPITRE 9 :

LA SUITE DES SUITES !



Au fil du temps

Les suites numériques sont présentes dans bien des sciences. Par exemple, on les utilise en biologie des populations pour décrire le cycle de reproduction des lapins, en astronomie dans les lois de répartition des planètes, en physique dans la théorie des particules élémentaires, en informatique dans les algorithmes et simulations (et via les ordinateurs, dans toutes nos activités numériques). Mais cette omniprésence n'est pas un hasard, car tous ces domaines se servent d'équations mathématiques. Or les suites occupent une place de choix en mathématiques depuis plus de 2000 ans.

Pourquoi un tel intérêt, alors qu'il s'agit simplement de ranger une succession infinie de nombres, liés par une loi, comme quand on énumère les jours ? Parce que cette simplicité n'est qu'apparente : l'étrange n'est jamais loin.

Prenons par exemple la suite des « puissances de un demi » $(u_n)_{n \geq 0} : \left(1 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{8} ; \frac{1}{16} ; \dots ; \left(\frac{1}{2}\right)^n ; \dots \right)$ et la série associée $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \dots$

Si ces nombres représentaient des tiges en bois mesurant chacune la moitié de la précédente (en commençant par 1 mètre), n'est-ce pas étonnant que la longueur maximale qu'on puisse atteindre en les mettant bout à bout ne dépasse pas 2 mètres, même avec une infinité de tiges ? Cela a stupéfait les savants qui l'ont découvert au XVIII^e siècle. Comment admettre que l'infini (le nombre de tiges) puisse être contenu dans le fini (2 mètres) ? Il s'en est suivi de violentes disputes entre les pro-infini et les contre, qui n'ont fait que s'amplifier jusqu'au XX^e siècle. Bref, ce sont les suites qui ont introduit l'infini dans l'arithmétique et l'analyse ...

Mais si le XVIII^e siècle est un tournant dans l'histoire des suites et de l'infini, leur origine remonte à Archimède de Syracuse, le mathématicien grec du III^e siècle avant JC. Archimède voulait résoudre une question qui n'avait rien à voir avec l'infini, le problème de la quadrature du cercle, grande énigme des maths anciennes : étant donné un cercle, comment construire une figure de même surface mais composée de carrés ou de triangles (figures que les Grecs savaient bien mesurer). Tel était le but d'Archimède ... Au lieu de répondre à son problème, il a découvert les suites et, sans le savoir, il a mis les mathématiciens sur la voie de l'infini.

Comment cela s'est-il produit ? Archimède pensait que la bonne méthode pour « quarrer » le cercle était de l'encadrer entre deux figures faites de triangles, puis de faire converger la taille de ces triangles jusqu'à les faire coïncider (comme si l'on cherchait à emprisonner un objet entre des murs qui se rapprochent). Archimède choisit comme figures connues et quarrables pour coïncider le cercle, les polygones réguliers, faits de triangles disposés en pétales de fleur, en commençant par l'hexagone (six côtés, six triangles équilatéraux) : il encadre le cercle entre l'hexagone inscrit et l'hexagone circonscrit. Ensuite, il passe au dodécagone (12 côtés), puis il enchaîne sur le polygone à 24 côtés, puis 48 et enfin 96. A chaque pas, les mesures se rapprochent, mais jamais elles ne s'égalent ... Il obtient ainsi une suite illimitée de nombres connus dont la limite est 2π et qui fournissent très rapidement une bonne approximation de π .

Las, Archimède ne résoudra jamais le problème de la quadrature du cercle, et pour cause. Les mathématiciens du XIX^e siècle démontreront qu'il n'a pas de solution, d'où l'expression « C'est la quadrature du cercle ! ». Mais Archimède a bel et bien inauguré l'histoire des suites, car dans sa méthode, il montre comment calculer la surface du polygone n en fonction de celui qui précède (le $n - 1$ ^{ème}). Le terme u_n défini par le terme u_{n-1} , c'est bien là une suite, la première du genre, et qui peut être prolongée autant que l'on veut ... jusque dans l'infini.

Plus tard, les suites furent formalisées par Cauchy, la maîtrise de cet outil a été grandement facilitée par l'adoption de la notation indicielle au XIX^e siècle qui consiste à noter chaque nombre d'une suite par une même lettre affectée d'un indice.

On doit à Péano la définition d'une suite numérique telle qu'elle est enseignée en première S.

I) Suite Arithmétique

I.1. Découverte des suites arithmétiques au travers d'un exemple



Travail de l'élève 1 : Dans le pays des merveilles d'Alice, le lapin blanc, depuis le temps, a fait des enfants (enfin des adolescents plutôt...). Du plus vieux au plus jeune : le lapin bleu, le lapin rouge, le lapin vert et le lapin noir. A l'adolescence chacun des 4 lapins a réclamé de l'argent de poche. Noter que les lapins du pays des merveilles sont adolescents de 0 à 4 ans, ils deviennent enfants par la suite et n'ont jamais été adultes.

Le lapin blanc a décidé de donner au lapin bleu dès sa naissance et jusqu'au jour de ses 4 ans des carottes de la manière suivante :

- ↪ 3 carottes la première semaine ;
- ↪ Chaque semaine deux carottes de plus que la semaine précédente.

On admet qu'au pays des merveilles chaque année est constituée d'exactly 52 semaines et chaque mois de 4 semaines.

On note $u_0 = 3$ et u_n le nombre de carottes reçues par le lapin bleu le jour où il fête ses n semaines.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n ; calculer u_1 ; u_2 et u_3 . Combien de carottes le lapin bleu a-t-il reçu le premier mois ?
2. Proposer une formule donnant u_n en fonction de n . Vérifier cette formule en recalculant u_1 ; u_2 et u_3 .
3. Calculer le nombre de carottes reçues par le lapin bleu le jour de ses 1 an, de ses 2 ans, de ses 3 ans et enfin le jour de ses 4 ans.
4. Pour leur seule consommation personnelle les lapins du pays des merveilles ont besoin de 300 carottes par semaine.
 - a. A partir de quel âge le lapin bleu peut-il se nourrir à satiété ?
 - b. Déterminer le nombre total de carottes que le lapin blanc a donné au lapin bleu au cours de son adolescence. On devra donc calculer :

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{207} = \sum_{i=0}^{i=207} u_i$$

- c. Dès qu'il reçoit plus de 300 carottes, le lapin bleu (fort économe) met toutes les autres de côté. Déterminer le nombre de carottes économiser par le lapin bleu.
- d. Grand amateur de montre, le lapin bleu décide de troquer ses carottes contre des montres au cours suivant, 1 montre contre 540 carottes. Déterminer le nombre de montres que le lapin bleu a pu acquérir grâce aux carottes économisées.

I.2. Définition



Définition 1.

Une suite arithmétique est une suite de nombres dans laquelle chaque terme permet de déduire le suivant en lui ajoutant la même constante appelée raison.

Si on note u une suite arithmétique de raison r définie pour tout entier n on a donc, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + r$$



Exemple :

La suite des entiers naturels pairs est une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 2

Remarque : Si u est suite arithmétique de raison r alors pour tout n on a :

$$u_{n+1} = u_n + r \iff u_{n+1} - u_n = r$$

Si la raison $r > 0$ alors la suite arithmétique est strictement croissante, au contraire si $r < 0$ la suite arithmétique est strictement décroissante. Dans le cas où $r = 0$ il s'agit d'une suite constante.

 **Exercice du Cours** : Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ? Dans le cas d'une réponse positive préciser leur raison et leur sens de variation.

1. $u_n = 3n - 2$

2. $u_n = n^2 - 3$

3. $u_n = -4n + 1$

 **Exercice 1** : Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ? Si oui, déterminer le premier terme et la raison.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 7 - 4n$;

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = 5n + 1$;

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = n^2 - 1$;

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = (n+1)^2 - n^2$;

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \frac{n}{n+1}$;

I.3. Expression explicite en fonction de n

On considère une suite arithmétique u de raison r et de premier terme u_0 , on a alors :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + r \\ \Rightarrow u_2 &= u_1 + r = u_0 + 2r \\ \Rightarrow u_3 &= u_2 + r = u_0 + 3r \\ \Rightarrow u_4 &= u_3 + r = u_0 + 3r + r = u_0 + 4r \\ \Rightarrow &\dots\dots\dots \\ \Rightarrow u_n &= u_{n-1} + r = u_0 + (n-1)r + r = u_0 + nr \end{aligned}$$

Propriété 1.

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r , alors

$$u_n = u_0 + nr$$

Exemple :

(u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2.

Calculer u_{2015}

Théorème 1.

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r , alors pour tous p et n de \mathbb{N} :

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

**Preuve**

D'après la propriété précédente on a pour tous p et n de \mathbb{N} :

$$u_p = u_0 + pr \quad \text{et} \quad u_n = u_0 + nr$$

Par conséquent

$$u_n - u_p = u_0 + nr - u_0 - pr = (n - p)r \iff u_n = u_p + (n - p)r$$

**Exemple :**

Considérons une suite arithmétique (v_n) telle que $v_{27} = 6$ et $v_{39} = 10$

Calculer v_7 et v_{74}

**Théorème 2.**

On considère une suite (u_n) définie par $u_n = an + b$ où a et b sont deux réels.
 (u_n) est une suite arithmétique de raison a

**Preuve**

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a alors :

$$u_{n+1} - u_n = a(n+1) + b - an - b = a$$

I.4. Somme de termes successifs

Remarque : Soit (u_n) une suite. La somme $u_1 + u_2$ comporte deux termes, de même la somme $u_1 + u_2 + u_3$ en comporte 3. De manière générale la somme $u_1 + u_2 + \dots + u_p$ comporte p termes.

Combien en comporte la somme $:u_{14} + u_{15} + \dots + u_{25}$? On peut remarquer que cette somme s'écrit encore :

$$u_{1+13} + u_{2+13} + \dots + u_{13+12}$$

Par conséquent elle comporte 12 termes, i.e $25 - 14 + 1$ termes.

**Propriété 2.**

La somme $u_p + u_{p+1} + \dots + u_q$ comporte donc $q - p + 1$ termes (p et q sont des nombres entiers tels que $p < q$)

**Propriété 3.** (Somme des n premiers entiers)

$$1 + 2 + \dots + n - 1 + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

**Preuve**

Notons $S = 1 + 2 + \dots + n - 1 + n$, on a $2S = 1 + 2 + \dots + n + 1 + 2 + \dots + n = (1 + n) + (2 + n - 1) + (3 + n - 2) + \dots + (n - 2 + 3) + (n - 1 + 2) + (n + 1) = n(n + 1)$ donc $S = \frac{n(n+1)}{2}$

 **Exemple :**

La somme des 100 premiers entiers est donc :

$$\frac{100 \times 101}{2} = \frac{10100}{2} = 5050$$

 **Théorème 3.**

On considère une suite arithmétique u et S la somme des termes successifs (à partir de celui de rang p jusqu'à celui de rang n) que l'on note :

$$S = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = \sum_{i=p}^{i=n} u_i$$

On a alors :

$$S = \frac{(n-p+1)(u_p + u_n)}{2}$$

**Preuve**

On a :

$$S = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$$

En notant r la raison on obtient :

$$S = u_p + (u_p + r) + (u_p + 2r) + \cdots + (u_n - 2r) + (u_n - r) + u_n$$

En inversant l'ordre des termes de cette somme, S s'écrit aussi :

$$S = u_n + (u_n - r) + (u_n - 2r) + \cdots + (u_p + 2r) + (u_p + r) + u_p$$

Effectuons alors la somme, membre à membre terme à terme, des deux égalités précédentes :

$$2S = (u_p + u_n) + (u_p + r + u_n - r) + (u_p + 2r + u_n - 2r) + \cdots + (u_n - 2r + u_p + 2r) + (u_n - r + u_p + r) + (u_n + u_p)$$

Cette somme comporte $n - p + 1$ termes tous égaux à $u_p + u_n$, par conséquent :

$$2S = (n - p + 1)(u_p + u_n) \iff S = \frac{(n - p + 1)(u_p + u_n)}{2}$$

 **Exemples :**

1. Calculer la somme des 50 premiers entiers impairs.
2. Calculer la somme des 50 premiers entiers pairs en partant de 12

 **Exercice 2** : Calculer la somme $A = 100 + 103 + 106 + \dots + \dots + 400$.

 **Exercice 3** : Une entreprise parisienne doit envoyer un certain nombre de colis en province. Un transporteur propose les conditions suivantes :

98 € pour le premier colis et une réduction de 3 € pour chaque colis supplémentaire.

1. Combien coûte l'envoi de 10 colis ?
2. Le budget transport de l'entreprise est de 50000 €. Combien de colis l'entreprise peut-elle envoyer ?

 **Exercice 4** : En reprenant le contexte de l'activité introductive. Le lapin blanc décide pour son second, le lapin rouge de donner dès sa naissance et jusqu'au jour de ses 4 ans des carottes de la manière suivante :

↪ 417 carottes la première semaine ;

↪ Chaque semaine deux carottes de moins que la semaine précédente.

On note v la suite telle que v_n vaut le nombre de carottes reçues par le lapin rouge le jour de sa n -ième semaine. Notons que $v_1 = 417$ et que v_0 n'existe pas.

1. Justifier que v_n est une suite arithmétique ; préciser sa raison et son sens de variation.
2. Exprimer v_n en fonction de n .
3. Calculer le nombre de carottes reçues par le lapin bleu le jour de ses 1 an, de ses 2 ans, de ses 3 ans et enfin le jour de ses 4 ans.
 - a. Jusqu'à quel âge le lapin bleu peut-il se nourrir à satiété ?
 - b. Déterminer le nombre total de carottes que le lapin blanc a donné au lapin rouge au cours de son adolescence. On devra donc calculer :

$$S = v_1 + v_2 + \dots + v_{208} = \sum_{i=1}^{i=208} v_i$$

- c. Dès qu'il reçoit plus de 300 carottes, le lapin rouge (fort économe comme son frère) met toutes les autres de côté. Déterminer le nombre de carottes économiser par le lapin rouge.
 - d. Grand amateur de montre, le lapin rouge décide de troquer ses carottes contre des montres mais l'inflation existe au pays des merveilles. Il faut 10% de carottes supplémentaires pour obtenir une montre qu'au temps du lapin bleu. Le lapin rouge est-il perdant par rapport à son frère ?
4. Le lapin blanc constatant l'injustice subit par le lapin rouge décide d'utiliser une autre méthode pour les « carottes de poches » du lapin suivant, le lapin vert. Il le rémunère de sa naissance et jusqu'au jour de ses 4 ans de la manière suivante :
 - ↪ 1 carotte la première semaine ;
 - ↪ Chaque semaine trois carottes de plus que la semaine précédente ;
 - ↪ 100 carottes les 6 derniers mois.

On note w la suite telle que $w_0 = 1$ et w_n désigne le nombre de carottes reçues par le lapin rouge le jour où il fête ses n semaines.

- a. La suite w est-elle arithmétique ?
- b. Plus précisément déterminer le rang jusqu'au quel w se comporte comme une suite arithmétique.
- c. Identique à ses frères le lapin rouge économise dès qu'il reçoit plus de 300 carottes par semaine. Mais durant les 6 derniers mois il mange un peu de ses économies de manière à manger 300 carottes exactement par semaine. Sachant que le cours de la carotte a encore augmenté de 50% déterminer le nombre de montre que le lapin rouge possèdera au moment de devenir enfant.

 **Exercice 5** : Soit u une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r . Déterminer la limite de la suite u , lorsque :

1. $u_0 = -2$ et $r = -3$;

2. $u_0 = 2$ et $r = -3$;

3. $u_0 = -3$ et $r = 2$;

4. $u_0 = 3$ et $r = 2$.

II) Suite Géométrique

II.1. Découverte des suites géométriques au travers d'un exemple

 **Travail de l'élève 2** : Vient le tour du dernier né du lapin blanc, le lapin noir. Détestant les habitudes le lapin blanc modifie une nouvelle fois le système des « carottes de poches » et le lapin noir se voit proposer le système suivant :

- ↪ 3 carottes la première semaine ;
- ↪ Chaque semaine 3,5% de carottes en plus de la semaine précédente (le lapin blanc donnera s'il le faut des morceaux de carottes...)

On note t la suite telle que t_n vaut le nombre de carottes reçues par le lapin rouge le jour de sa n -ième semaine. Notons que $t_1 = 3$ et que t_0 n'existe pas.

1. Calculer t_1 ; t_2 et t_3 puis exprimer t_{n+1} en fonction de t_n . Combien de carottes le lapin noir a-t-il reçu le premier mois ?
2. Proposer une formule donnant t_n en fonction de n . Vérifier cette formule en recalculant t_1 ; t_2 et t_3 .
3. Calculer le nombre de carottes reçues par le lapin noir le jour de ses 1 an, de ses 2 ans, de ses 3 ans et enfin le jour de ses 4 ans.
4. Pour leur seule consommation personnelle les lapins du pays des merveilles ont besoin de 300 carottes par semaine.
 - a. A partir de quel âge le lapin noir peut-il se nourrir à satiété ?
 - b. Déterminer le nombre total de carottes que le lapin blanc a donné au lapin noir au cours de son adolescence. On devra donc calculer :

$$S = t_1 + t_2 + \dots + t_{208} = \sum_{i=1}^{i=208} t_i$$

- c. Dès qu'il reçoit plus de 300 carottes, le lapin noir (comme les autres) met toutes les autres de côté. Déterminer le nombre de carottes économiser par le lapin noir.
- d. Par rapport au lapin précédent, le cours de la carotte a encore augmenté de 10%. Déterminer le nombre de montres que le lapin noir a pu acquérir grâce aux carottes économisées.

II.2. Définition

Définition 2.

Une suite géométrique est une suite de nombres dans laquelle chaque terme permet de déduire le suivant par multiplication par un coefficient constant appelé raison. Ainsi, une suite géométrique u de raison q et de premier terme a a la forme suivant :

$$a \quad aq \quad aq^2 \quad aq^3 \quad aq^4$$

La définition peut s'écrire sous la forme d'une relation de récurrence, c'est-à-dire que pour chaque entier naturel n :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Exemple :

La suite des puissances de 2 est une suite géométrique de raison 2 : $u_{n+1} = 2 \times u_n$

Donner les premiers termes de la suite géométrique de premier terme 2 et de raison 0,5.

Exercice du Cours :

1. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{2}{3^n}$ est géométrique
2. La suite (v_n) est définie par $v_0 = 6$ et $v_{n+1} = 3v_n + 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On note

$$w_n = v_n + 2$$

Montrer que (w_n) est une suite géométrique.

 **Exercice du Cours** : Montrer que la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2 \times (-1)^n$ est géométrique. On précisera sa raison.

 **Exercice 6** : Les suites suivantes sont-elles géométriques ? Si oui, déterminer le premier terme et la raison.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -\frac{2}{5^n}$;
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{2^{2n}}{3^{3n}}$;
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = 5^{2n+3}$;
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \frac{3n+2}{n+1}$;

II.3. Expression explicite en fonction de n

Théorème 4.

On considère une suite (u_n) définie par $u_n = aq^n$ où a et q sont deux réels non nuls.
 (u_n) est une suite géométrique de raison q

Preuve

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} = aq^{n+1} = aq^n \times q = qu_n$. Par conséquent la suite est géométrique de raison q

Théorème 5.

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 0$ et de premier terme u_0 alors

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Preuve

On peut raisonner de proche en proche. On a :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 q \\ u_2 &= u_1 q = u_0 q^2 \\ u_3 &= u_2 q = u_0 q^3 \\ &\dots \\ u_{n-1} &= u_{n-2} q = u_0 q^{n-2} \\ u_n &= u_{n-1} q = u_0 q^{n-1} \end{aligned}$$

 **Exemple :**

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison 3. On a alors :

$$u_n = 2 \times 3^n$$

On peut, par exemple calculer directement $u_5 = 2 \times 3^5 = 2 \times 243 = 486$

 **Théorème 6.**

(u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 0$ alors quels que soient les entiers naturels n et p on a :

$$u_n = q^{n-p} \times u_p$$

 **Preuve**

D'après le théorème précédent, on a :

$$u_n = u_0 q^n \quad \text{et} \quad u_p = u_0 q^p$$

donc, puisque $q \neq 0$, $u_0 = \frac{u_p}{q^p}$; d'où $u_n = \frac{u_p}{q^p} q^n = u_p \times q^{n-p}$

 **Exercice du Cours** : (u_n) et (v_n) sont deux suites géométriques. Déterminer u_5 , u_8 , v_7 et v_{15} sachant que :

1. $u_0 = 6$ et $q = -\frac{1}{3}$
2. $v_5 = 1$ et $v_{10} = 32$

II.4. Somme de termes successifs

On s'intéresse à la somme des n premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison q , avec $q \neq 1$

 **Propriété 4.** (Cas particulier $u_n = q^n$, avec $q \neq 1$)

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2} + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

 **Preuve**

Notons $S = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2} + q^{n-1}$, on a $qS = q + q^2 + \dots + q^{n-2} + q^{n-1} + q^n$

Par conséquent

$$(1 - q)S = S - qS = 1 - q^n \iff S = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

 **Exemple :**

La somme des 10 premiers termes de cette suite géométrique lorsque $q = 2$ est donc :

$$\frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 1023$$

 **Théorème 7.**

La somme des termes consécutifs, du terme de rang p au terme de rang n , d'une suite géométrique de raison q ($q \neq 1$) est égale à :

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

**Preuve**

On calcule donc S , la somme des $n - p + 1$ termes consécutifs, de premier terme u_p , d'une suite géométrique de raison q où $q \neq 1$

$$S = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = u_p + u_p \times q + u_p \times q^2 + \dots + u_p \times q^{n-p+1-1} = u_p(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-p+1-1}) = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

Remarque : Le cas $q = 1$ est trivial, en notant le premier terme de la somme a :

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = a + a + \dots + a = na$$

**Exemple :**

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = \frac{1}{2}$ et de raison $q = \frac{3}{2}$. Calculer $S = u_4 + u_5 + \dots + u_{14}$



Exercice 7 : Calculer la somme $B = 21 + 63 + 189 + \dots + 137781$



Exercice 8 : Un étudiant loue une chambre pour 3 ans. On lui propose deux types de bails.

1^{er} contrat : Un loyer de 200€ pour le premier mois puis une augmentation de 5€ par mois jusqu'à la fin du bail.

2^{ème} contrat : Un loyer de 200€ pour le premier mois puis une augmentation de 2% par mois jusqu'à la fin du bail ^(a).

1. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du deuxième mois puis le loyer du troisième mois.
2. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du dernier mois, i.e le loyer du 36^{ème} mois.
3. Quel est le contrat globalement le plus avantageux pour un bail de 3 ans ? (*Justifier par des calculs*)



Exercice 9 : On considère la suite géométrique définie de la façon suivante :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 2u_n \quad \forall n \geq 1$$

1. Calculer u_2 ; u_3 ; u_4 .
2. Exprimer u_n en fonction de n ; en déduire u_{64} .
3. **La légende du jeu d'échec :** *Le roi demanda à l'inventeur du jeu d'échec de choisir lui-même sa récompense. Celui-ci répondit : « place 1 grain de blé sur la première case de l'échiquier, deux grains sur la deuxième case, quatre sur la troisième case, et ainsi de suite jusqu'à la 64^{ème} case. Le roi sourit de la modestie de la demande. Calculer une valeur approchée du nombre total de grains de blé que le roi devra placer sur l'échiquier.*



Exercice 10 : Les rayons cosmiques produisent continuellement dans l'atmosphère du carbone 14, qui est un élément radioactif. Durant leur vie, les tissus animaux et végétaux contiennent la même proportion de carbone 14 que l'atmosphère. Cette proportion de carbone 14 décroît après la mort du tissu de 1,24% en 100 ans.

(a). Un bail est un contrat de location

1. Déterminer les pourcentages de la proportion initiale de carbone 14 contenu dans le tissu au bout de 1000 ans, de 2000 ans et de 10000 ans.
2. Exprimer le pourcentage de la proportion initiale de carbone 14 contenu dans le tissu au bout de $k \times 10^3$ années.
3. Un fossile ne contient plus que 10% de ce qu'il devrait contenir en carbone 14. Estimer son âge.

II.5. Convergence

Théorème 8.

Soit (u_n) une suite définie par : $u_n = q^n$ alors :

- ↪ Si $q \in]-1; 1[$ la suite (u_n) est convergente vers 0
- ↪ Si $q = 1$ alors la suite (u_n) est constante et donc convergente vers 1, si $q = -1$ la suite diverge (elle vaut tantôt 1 tantôt -1).
- ↪ Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est divergente (vers $+\infty$), enfin si $q < -1$ la suite diverge (un terme sur deux est négatif, l'autre est positif).

Pour cette démonstration, nous n'étudierons que le cas où $q > 0$, nous allons utiliser le résultat suivant ^(b)

Lemme 1. (Inégalité de Bernoulli)

Pour tout réel x positif et pour tout entier n , on a :

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$



Preuve du lemme

Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété $(1+x)^n \geq 1+nx$ est vraie

$\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont évidentes

Montrons que $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$.

On suppose donc que $(1+x)^n \geq 1+nx$ et on souhaite montrer que : $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

On a alors, pour tout $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} & (1+x)^n \geq 1+nx \\ \iff & (1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) \quad \text{en multipliant membre à membre par } (1+x) > 0 \\ \iff & (1+x)^{n+1} \geq 1+nx+x+nx^2 \\ \iff & (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x+nx^2 \\ \iff & (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x \quad \text{puisque } nx^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Résumons : On a donc $\mathcal{P}(0)$ mais aussi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$, par conséquent on a : pour tout réel x positif et pour tout entier n , on a :

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Remarque : Le type de raisonnement que l'on vient d'effectuer s'appelle le raisonnement par récurrence, il sera étudié amplement en terminale.

(b). un résultat servant une démonstration est usuellement appelé Lemme



Preuve du théorème

$\rightsquigarrow q > 1$

Posons $x = q - 1$, on a alors $x > 0$, et d'après l'inégalité de Bernoulli :

$$q^n = (1 + x)^n \geq 1 + nx$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + nx = +\infty$, par comparaison on en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$$

La suite (u_n) diverge donc vers $+\infty$

$\rightsquigarrow q \in [0; 1[$

Si $q = 0$ le résultat est évident, sinon posons $q' = \frac{1}{q}$, dans ce cas $q' \in]1; +\infty[$

D'après le résultat précédent :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q'^n = +\infty$$

Par passage à l'inverse nous obtenons donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$$

La suite (u_n) converge donc vers 0

$\rightsquigarrow q = 1$, le résultat est alors évident.

 **Exercice du Cours** : (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $\frac{1}{2}$. On note s_n la somme $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

1. Exprimer s_n en fonction de n
2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$

 **Exercice 11** : Soit v une suite arithmétique de premier terme v_0 et de raison q . Dans chaque cas, préciser si la suite v admet une limite. Si oui, la déterminer.

1. $v_0 = 2$ et $q = 3$;
2. $v_0 = 2$ et $q = -3$;
3. $v_0 = -2$ et $q = 0.5$;
4. $v_0 = 3$ et $q = -\frac{5}{7}$.

 **Exercice 12** : Soit u la suite arithmétique de raison 0,8 et de premier terme $u_0 = -10$. Soit v la suite géométrique de raison 1,2 et de premier terme $v_0 = -2$ et enfin w la suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme $w_0 = 5$.

1. Déterminer le sens de variation des suites u , v et w .
2. Déterminer les limites des suites, u , v et w .
3. Déterminer le rang à partir duquel :

a. $u_n \geq 10^6$;

b. $v_n \leq -10^6$;

c. $|w_n| \leq 10^{-6}$.

 **Exercice 13** : On considère la suite u définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{5u_n}{2u_n + 5}$

1. a. Calculer les 7 premiers termes de la suite u .
- b. Quelles conjectures peut-on émettre sur le signe de u_n , le sens de variation et la convergence de u ?

- c. Calculer les 7 premiers termes de la suite v définie sur \mathbb{N} par $v_n = \frac{1}{u_n}$. Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de la suite v ?
2. Justifier que pour tout entier naturel n on a $u_n > 0$.
3. a. Montrer que la suite v est une suite arithmétique. On donnera sa raison.
b. Exprimer v_n en fonction de n .
4. a. Exprimer u_n en fonction de n .
b. Etudier le comportement à l'infini de la suite v , puis celui de la suite u .

 **Exercice 14** : On partage un carré de côté 1 en quatre carrés de même taille et on noircit le carré inférieur gauche. On applique le même procédé au carré en haut à droite. Et ainsi de suite. Quelle sera l'aire de la partie noire lorsqu'on poursuit indéfiniment la construction ?

 **Exercice 15** : Soit la suite v définie sur \mathbb{N} par $v_0 = 1000$ et $v_{n+1} = 1,005 \times v_n + 30$

On considère l'algorithme ci-contre.

1. a. Faire fonctionner l'algorithme pour $n = 4$. Obtient-on v_4 ?
b. Transformer l'algorithme de façon à obtenir v_n en fonction de n
c. Programmer cet algorithme et déterminer v_{60}
2. On considère la suite u définie par $u_n = v_n + 6000$.
a. Démontrer que la suite u est géométrique.
b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n , puis vérifier le résultat de la question précédente.
3. On place 1000 € sur un livret qui rapporte 0,5% par mois, à la fin de chaque mois, on y verse, en plus, la somme de 30€.

Ce livret est bloqué pour 5 ans, ce qui signifie que, sur cette période, il est impossible de retirer de l'argent. Donner la somme présente sur ce livret au terme du contrat.



Algorithme 1 :

Variables

$S \in \mathbb{R}$; n et k sont des nombres entiers naturels.

Début

Saisir n

$S := 1000$ et $k := 0$

Tant que ($k < n$) **Faire**

$k := k + 1$ et $S := 1,005 \times S$

Fin Tant que

Afficher S .

Fin

Des exercices donnés en devoir

Exercice 16 : 2 points

Calculer les sommes suivantes : $S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + 2014 + 2015$

$S_2 = 6 + 18 + 54 + \dots + 354\,294$

On prendra soin de rédiger la réponse clairement. Notamment, pour S_2 , on justifiera la formule utilisée en précisant la suite considérée ainsi que sa nature.

Exercice 17 : 6 points

On souhaite construire un château de cartes à n niveaux ($n \geq 1$). On a représenté ci-dessous un château à quatre niveaux. On appelle $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite dont chaque terme u_n est égal au nombre de cartes du niveau n en partant d'en haut. Ainsi $u_1 = 2$ et $u_2 = 5$.

1. Déterminer u_3 et u_4 grâce au dessin.
2. Donner la nature de la suite (u_n) ainsi que ses éléments caractéristiques (*inutile de justifier*).

A partir de maintenant, toutes les réponses doivent être justifiées par des formules du cours et des calculs.

3.
 - a. Combien de niveaux aura un château dont la dernière rangée est composée de 23 cartes ?
 - b. En déduire le nombre de cartes d'un tel château.
4.
 - a. Exprimer le nombre S de cartes d'un château à n niveaux en fonction de n .
On prendra soin à n'avoir plus que la lettre n dans l'expression de S .
 - b. Quelle est le nombre de niveaux du plus grand château que l'on peut fabriquer si l'on dispose de 500 cartes ?
 - c. Quelle sera alors le nombre de cartes de la rangée du bas ?



Exercice 18 : 2 points

La suite (u_n) est arithmétique de raison r . On sait que $u_{20} = 10$ et $u_{34} = -18$.

1. Calculer la raison r et u_0 .
2. Calculer la somme $S = u_{50} + u_{51} + \dots + u_{100}$

Exercice 19 : 5 points

Un capital $C_0 = 10\,000\text{€}$ est placé sur un compte coûtant 20€ par an pour frais de gestion, puis rapportant 4% à la fin de chaque année. On nomme C_n le montant disponible sur le compte à la fin de la $n^{\text{ème}}$ année, après le versement des intérêts.

1.
 - a. Calculer C_1 puis C_2 .
 - b. Justifier que pour tout $n \geq 0$ on a $C_{n+1} = 1.04C_n - 20.8$
2. On pose $u_n = C_n - 520$ pour tout $n \geq 0$.
 - a. Pour tout $n \geq 0$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
 - b. En déduire la nature de la suite (u_n) et donner ses éléments caractéristiques.
 - c. Exprimer alors u_n en fonction de n , puis C_n en fonction de n .
3. Afficher sur votre calculatrice les premiers termes de la suite (C_n) et en déduire au bout de combien d'années le capital aura au moins doublé.

« *La vie est faite de hasard contraire au destinée.* »

JOHAN SFAR, Issu du film « Gainsbourg, vie héroïque »