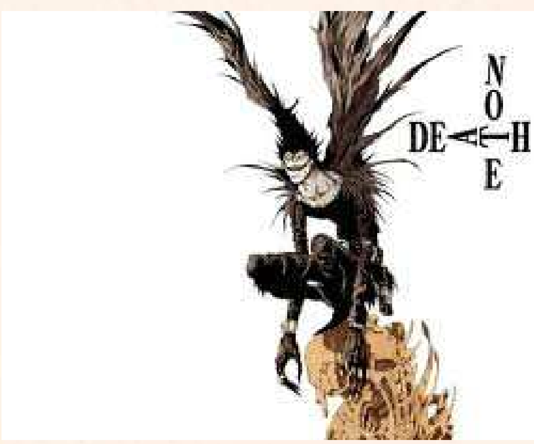
Chapitre 7

Partons á la dérive !

Hors Sujet



Titre : « Death Note »

Auteur : Oba et Obata

Présentation succinte : *Death Note* est un manga de type shônen, créé par le scénariste Tsugumi Oba et le dessinateur Takeshi Obata. Il a été prépublié dans un journal de 2003 à 2006, et par la suite publiée en douze tankôbon de 2004 à 2006.

L'histoire est centrée sur *Raito Yagami*, un lycéen surdoué qui juge le monde actuel criminel et corrompu. Sa vie change du tout au tout le jour où il ramasse par hasard un mystérieux cahier intitulé « Death Note ». Ancienne propriété d'un dieu de la mort, le Death Note permet à son utilisateur de tuer toute personne dont il connaît le nom et le visage. Raito décide d'utiliser le Death Note pour exterminer les criminels, dans le but d'éradiquer le Mal et de bâtir un monde parfait dont il sera le dieu. Mais les nombreuses morts inexpliquées de criminels à travers le monde attirent l'attention d'Interpol et du mystérieux *L*, un détective capable de résoudre n'importe quelle énigme, mais dont personne ne connaît ni le visage ni le nom. L décide d'enquêter pour capturer le tueur en série, surnommé par le grand public « Kira ». Entre Raito et L, tous deux persuadés d'agir pour la justice, s'engage un combat acharné pour découvrir en premier l'identité de l'autre...

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

I) Taux de variation d'une fonction **2**
I.1. Définition 2
I.2. Limite du taux de variation et nombre dérivé 3
II) Interprétation graphique du nombre dérivé **6**
II.1. Un certain coefficient directeur 6
II.2. Equation de la tangente 8
III) Fonction dérivée **10**
III.1. Définitions 10
III.2. Dérivées des fonctions de références 10

L'ESSENTIEL :

- ⇝ Découvrir la notion de taux de variation d'une fonction et celle de limite.
- ⇝ Définir le nombre dérivé d'une fonction en un point.
- ⇝ Le calculer, le trouver à la calculatrice, l'interpréter graphiquement.
- ⇝ Trouver l'équation d'une tangente en un point.
- ⇝ Tracer une tangente connaissant le nombre dérivé.
- ⇝ Découvrir la notion de fonction dérivée.
- ⇝ Connaître les fonctions dérivées des fonctions de référence.

« Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée ! »
JOHN LOUIS VON NEUMANN

PARTONS Á LA DÉRIVE !

Au fil du temps

En mathématiques, la dérivation élémentaire est le calcul permettant de définir une variation de phénomène par unité de temps ou par unité géométrique. La dérivée f' d'une fonction f en un point x_0 ne fait rien d'autre que d'indiquer la valeur de la pente de la fonction en ce point : par exemple, si la pente au point x_0, appelé nombre dérivé de f en x_0 et que l'on note $f'(x_0)$, est positive, alors c'est que la courbe de la fonction est orientée « vers le haut » en ce point (elle est croissante) et la valeur de $f'(x_0)$ indique si cette montée est plutôt douce ou forte. De même, si $f'(x_0)$ est négative, la courbe est « descendante » en ce point, et si $f'(x_0) = 0$, la courbe y connaît un répit horizontal. En bref, la fonction dérivée f' n'a pour rôle que de donner toutes les informations sur les variations de f ...
Pourtant, la découverte des fonctions dérivées ne se fit qu'au XVII^e et a été l'un des moments forts des mathématiques.
Ceci a obligé les mathématiciens à raisonner en termes de sommes infinies d'éléments « infiniment petits », pour lesquels il a fallu inventer des règles et des opérations. La dérivation a également été une extraordinaire découverte pour la Physique : la connaissance des variations d'une fonction s'est révélée essentielles à la description des phénomènes naturels car les théories physiques parlent avant tout des variations de la nature.

Il faut dire que, dès les premières décennies du XVII^e, l'étude des « courbes » géométriques, inaugurée par les Grecs anciens, s'est déjà transformée en l'étude de fonctions plus générales. C'est Blaise Pascal qui, le premier, mène des études sur la notion de tangente à une courbe - lui-même les appelait « touchantes ». Grâce aux travaux de Fermat, on sait également qu'une fonction (continue) change son mode de variation en passant par un point où sa tangente a une pente nulle, l'extremum, ce qui renseigne sur la forme géométrique de cette fonction. Mais l'ambition des mathématiciens du XVII^e siècle est bien plus générale : il s'agit pour eux de montrer qu'une fonction contient dans son expression mathématique toutes les informations sur ses tangentes et, inversement, que les informations données par les tangentes à une fonction inconnue doivent permettre de reconstruire celle-ci (ce qui équivaut à reconstruire un trajet en voiture à partir uniquement de ses variations de vitesse et de direction).
Mais cette intuition sur le lien entre la fonction et ses tangentes se heurte à un problème : le nombre de tangentes à une courbe est infini car chaque point à la sienne ! Comme les mathématiciens de l'époque ne savent pas raisonner avec l'infini, il leur parait impossible de calculer la pente exacte d'une tangente au point $(x; f(x))$, d'autant plus qu'au sens géométrique un point n'a pas de tangente !

Cependant, dès la seconde moitié du XVII^e siècle, le domaine mathématique de l'analyse numérique connait une avancée prodigieuse grâce aux travaux de Newton et de Leibniz en matière de calcul différentiel et intégral. La notion de nombre dérivée se retrouve pour la première fois dans leurs écrits, sous le nom « fluxion », et défini comme « le quotient ultime de deux accroissements évanescents ».
Entre 1660 et 1675, Leibniz et Newton découvrent, chacun de leur côté et indépendamment, une nouvelle mathématique qui permet de raisonner sur des segments « infiniment petits » d'une fonction f. L'idée essentielle est que si l'on considère des segments de plus en plus proche de sa courbe, alors leur tangente tend à se confondre avec le segment lui-même : du coup, sa pente se déduit directement de l'expression de la fonction f.
Néanmoins la théorie du calcul infinitésimal, tout juste éclose, n'est pas encore pourvue de toute la rigueur mathématique qu'elle aurait exigée, et notamment la notion d'infiniment petit qui tient plus de l'intuitif, et qui pourrait engendrer des erreurs dès lors que l'on ne s'entend pas bien sur ce qui est ou non négligeable.

Au XVIII^e siècle Lagrange utilise la notation $f'(x)$, aujourd'hui tout à fait usuelle, pour désigner le nombre dérivé de f en x, tandis que d'Alembert introduit la définition plus rigoureuse du nombre dérivé en tant que limite du taux d'accroissement - sous une forme semblable à celle qui est utilisée et enseignée de nos jours. Cependant, à l'époque de d'Alembert, c'est la notion de limite qui pose problème : elle n'est pas encore construite formellement !
C'est seulement avec les travaux de Weierstrass au milieu du XIX^e siècle que le concept de dérivée sera entièrement formalisé.

Dans tout le chapitre, a et b désignent deux nombres réels, f est une fonction définie sur un intervalle I contenant a et b, et on appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$.

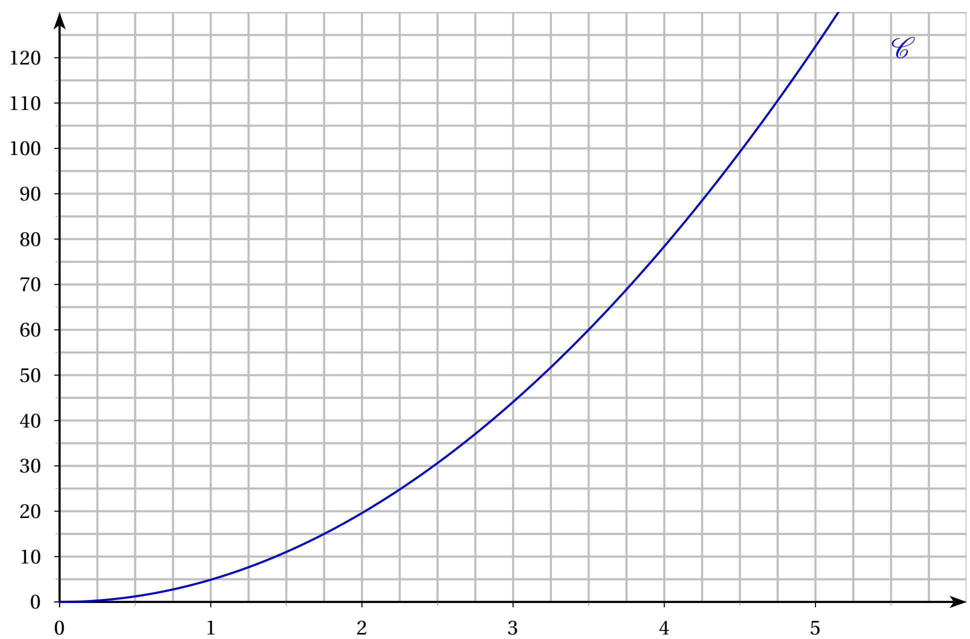
I) Taux de variation d'une fonction

I.1. Définition

Travail de l'élève **1.** En Syldavie, Fabrice, grand amateur de Kôsho[1] , aime lâcher les sacs des élèves studieux, sans vitesse initiale, du haut du quatre-vingt-septième étage des bâtiments du lycée de Gattaca.
L'objectif (car il y en a un) est d'étudier la vitesse des sacs. Par ailleurs, chacun sait que la distance parcourue, en mètres, par un objet en chute libre sans vitesse initiale, est :

$$d(t) = \frac{1}{2}gt^2 \qquad \text{où } g \text{ est la constante de pesanteur et vaut environ } 9.81m.s^{-2}$$

Dans géogébra, Fabrice a tracé la courbe représentative de d :



1. A partir de la courbe représentative de d, comparez les variations de la fonction d sur les intervalles $[0;2]$, $[2;4]$ et $[4;5]$.

2. Proposez une méthode calculatoire pour quantifier les variations de d sur ces intervalles.

3. Généraliser votre formule pour quantifier les variations de d sur un intervalle $[a;b]$, où a et b sont des réels positifs.

4. Interprétez vos calculs en termes de vitesse d'un sac.

1. Le Kôsho est un sport de combat se pratiquant sur deux trampolines séparés d'une mini-piscine. L'objectif est de faire tomber son adversaire dans l'eau, en sautant n'importe où et en allant au contact.
Ce sport est apparu pour la première fois de manière fictive, dans la série « Le prisonnier » de Patrick Mc Goohan, à la fin des années 60. Peu après, les fans de la série ont décidé de lui donner vie de manière officieuse, au niveau amateur. Peu à peu, le Kôsho prend de l'ampleur par le bouche à oreille, mais reste encore assez méconnu.
Fabrice est actuellement ceinture bleue de Kôsho, mais espère bien obtenir sa ceinture noire l'an prochain.
Notez bien que tout ceci est sans rapport avec notre activité, mais je tenais à le signaler

Définition 1.

On appelle **taux de variation** (ou d'accroissement) d'une fonction f entre deux réels a et b (avec $a \neq b$) la quantité :

$$\tau(a,b) = \frac{f(a)-f(b)}{a-b}$$

Remarque : Graphiquement, le taux de variation d'une fonction traduit la « vitesse de (dé)croissance » de sa courbe représentative sur un intervalle. On parle encore de l'allure de la pente d'une courbe.

Exemple :
Vous avez vu en seconde, voire en troisième, que les fonctions affines sont les fonctions avec un taux de variation constant.

Preuve

- Démontrons l'implication.
  Si f est la fonction affine définie par $f(x) = mx + p$ alors

$$\tau(a,b) = \frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{ma+p-(mb+p)}{a-b} = \frac{m(a-b)}{a-b} = m$$

  On retrouve le coefficient directeur de la droite représentative de la fonction f.

- Démontrons désormais la réciproque.
  Si f est une fonction dont le taux de variation est constant alors $\forall a,b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq b$, on a $\tau = \dfrac{f(a)-f(b)}{a-b} = k$ avec $k \in \mathbb{R}$.
  En particulier, si $a = x \in \mathbb{R}$ varie et b est fixé on a

$$\frac{f(x)-f(b)}{x-b} = k \iff f(x) = k(x-b)+f(b) \iff f(x) = kx-kb+f(b)$$

  Comme b est fixé, $-kb+f(b) = p$ est une constante et f est bien de la forme $f(x) = mx+p$ où $m = k$.

I.2. Limite du taux de variation et nombre dérivé

Travail de l'élève **2.** On reprend le contexte de l'activité précédente.

1. Fabrice cherche désormais à estimer une valeur approchée de la vitesse instantanée d'un sac au bout de 2 s.
   a. Proposez-lui une méthode, ainsi qu'une estimation.
   b. Comment pouvez-vous obtenir une meilleure estimation que celle de votre voisin ?
2. Fabrice affirme : « La vitesse instantanée à l'instant t est $v(t) = 9.81\,t$ m.s^{-1} ».
   a. Expliquez cette affirmation.
   b. Interprétez cette affirmation en terme de pente de la courbe représentative de d.
3. **Application** : un sac est lâché sans vitesse initiale du quatre-vingt-septième étage. En considérant que chaque étage fait 3m de haut, calculez, en km/h, la vitesse du sac au moment de l'impact au sol.

Définition 2.

Soit h un réel non nul tel que $a+h \in \text{I}$.
Il arrive que le taux de variation $\tau = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ devienne aussi proche que l'on veut d'un **nombre réel** ℓ, à condition de choisir h suffisamment proche de 0.
On dit alors que la limite de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est ℓ lorsque h tend vers 0 et on note :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell$$

On dit encore que $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un réel ℓ lorsque h tend vers 0.
Dans ce cas, on note $f'(a)$ le nombre ℓ, que l'on appelle **nombre dérivé** de f en a, et on dit que f est **dérivable** en a.

Remarques :

- Ainsi, si $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un réel quand h tend vers 0, on a $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$
- Graphiquement, le nombre $f'(a)$, lorsqu'il existe, mesure la « force » de la pente de la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse a.
  - Plus il est élevé, plus la courbe « monte vite » aux alentours du point de $\mathscr{C}$ d'abscisse a.
  - Si $f'(a)$ est négatif, cela indique que la courbe est décroissante aux alentours de ce point, etc

Exemples :

Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 5$ et $g(x) = x^2 + 3x - 4$.
- f est-elle dérivable en 2 ?
- g est-elle dérivable pour tout réel a ?
- Comparer les pentes des courbes représentatives de f et g au point d'abscisse 2.

***Solution* :**

- $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \dfrac{(2+h)^3 - 5 - 2^3 + 5}{h} = \dfrac{12h + 6h^2 + h^3}{h} = \dfrac{h(12+6h+h^2)}{h} = 12 + 6h + h^2$

  Comme $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = 12$, f est dérivable en 2 et on a $f'(2) = 12$.
- Calculons petit à petit :

  $$g(a+h)-g(a) = (a+h)^2+3(a+h)-4-\left(a^2+3a-4\right) = a^2+2ah+h^2+3a+3h-4-a^2-3a+4 = 2ah+3h+h^2$$

  Donc $\dfrac{g(a+h)-g(a)}{h} = \dfrac{2ah+3h+h^2}{h} = 2a+3+h$ et $\lim\limits_{h\to 0} 2a+3+h = 2a+3 \in \mathbb{R}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$

  Par conséquent la fonction g est dérivable pour tout réel a et on a $g'(a) = 2a+3$.
  Par exemple, le nombre dérivé de g en 5 est $g'(5) = 13$.
- En particulier $g'(2) = 7$. La courbe représentative de f « monte donc plus vite » que celle de g aux alentours de leur point d'abscisse 2.

Remarques :

- Il faut toujours modifier l'écriture de τ pour conjecturer la valeur de son éventuelle limite.
- Cauchy, mathématicien français qui passe pour le fondateur de l'analyse moderne, notamment pour la rigueur de ses définitions et de ses démonstrations, définit en 1821 le concept de limite : « Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par enn différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée limite de tous les autres ».
  On lui doit également la définition du nombre dérivé d'une fonction en un point telle qu'elle est enseignée aujourd'hui.
- Il est possible que le taux de variation ne tende pas vers un réel, mais, par exemple, soit aussi grand que l'on veut, à condition de choisir h assez proche de 0.
  On dira alors qu'il tend vers $+\infty$ lorsque h tend vers 0 et on notera :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = +\infty$$

  Dans ce cas, la fonction f n'est pas dérivable en a et le nombre $f'(a)$ n'existe pas.
  Nous verrons ce cas là dans deux exercices.

A la calculatrice

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 5$. Voici comment faire pour obtenir $f'(2)$ à la calculatrice :

Modèle	**Affichage dans l'écran de calcul**	**Pour obtenir l'instruction**
Casio	`d/dx(`x^3`-5,2)`	Appuyer sur $\boxed{\text{OPTN}}$ Choisir `CALC` avec $\boxed{\text{F4}}$ Puis `d/dx` avec $\boxed{\text{F2}}$
TI 82 à 84	`nbreDérivé(`x^3`-5,`x`,2)`	Appuyer sur $\boxed{\text{math}}$ Choisir `8:nbreDérivé`
TI 89	$d(x^3-5,x)\|x=2$ puis $\frac{d}{dx}\left(x^3-5\right)\|x=2$	Appuyer sur $\boxed{\text{F3 : Calc}}$ Choisir `1:d(   dérivée`
TI Nspire	$\frac{d}{dx}\left(x^3-5\right)\|x=2$	Dans l'écran de calcul , appuyer sur $\boxed{\text{menu}}$ Choisir `4: Analyse` Choisir `2: Dérivée en un point ...` Compléter `Variable :` x `et Valeur : 2`

Exercice 1 : On appelle f la fonction racine carré et h un réel strictement positif.

1. **a.** Ecrire le taux de variation τ de f sur l'intervalle $[3;3+h]$.

   b. Montrer que $\tau = \dfrac{1}{\sqrt{3+h}+\sqrt{3}}$

   c. En déduire que f est dérivable en 3 et donner la valeur de $f'(3)$.

2. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

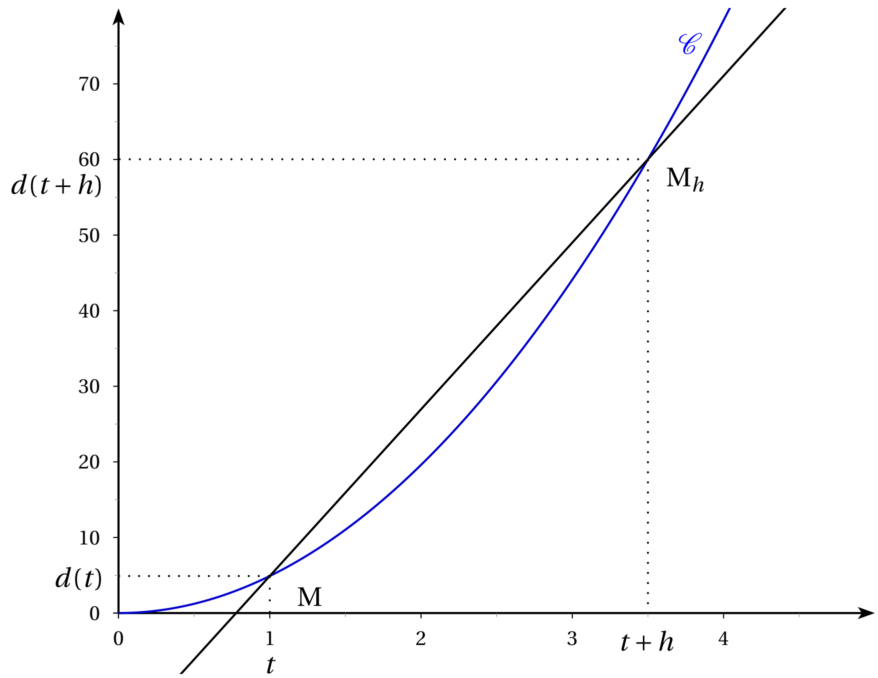
Exercice(s) du livre : Repère : n° **40 p 74 + 48 p 76**

II) Interprétation graphique du nombre dérivé

II.1. Un certain coefficient directeur

Travail de l'élève **3.** On reprend le contexte de l'activité précédente.
Fabrice, avide de tout savoir, souhaite comprendre l'interprétation graphique du nombre dérivée. Pour cela, il a complété son graphique dans géogébra ainsi :

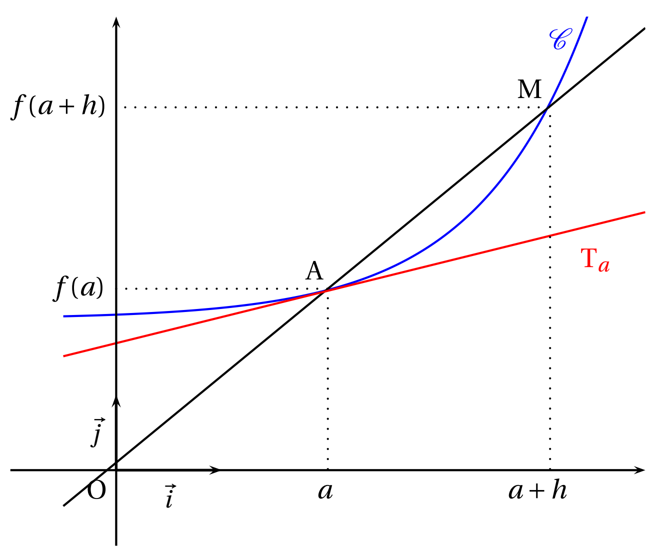
- ⇝ la courbe $\mathscr{C}$, représentative de la fonction d sur l'intervalle $[0;5]$ (échelle : X :Y = 1 :20).
- ⇝ un point M quelconque sur la courbe $\mathscr{C}$, d'abscisse t,
- ⇝ un curseur h allant de -5 à 5, d'incrémentation 0.01,
- ⇝ le point M_h de la courbe $\mathscr{C}$ et d'abscisse $t+h$,
- ⇝ la droite (MM_h),



1. Déteminez le coefficient directeur de la droite (MM_h) en fonction de t et h.
2. Quel lien peut-on établir avec l'activité précédente ?
3. Faire varier h sur le logiciel puis proposez une interprétation graphique du nombre dérivé à Fabrice.

Proposition 1.

Soit f une fonction dérivable en a et A le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a.
Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente T_a à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a.

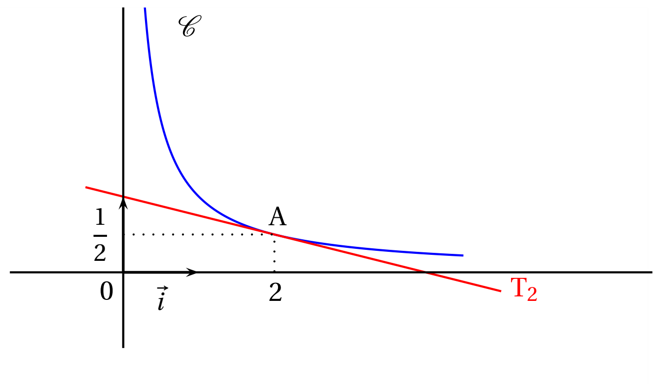


Exemple :

f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

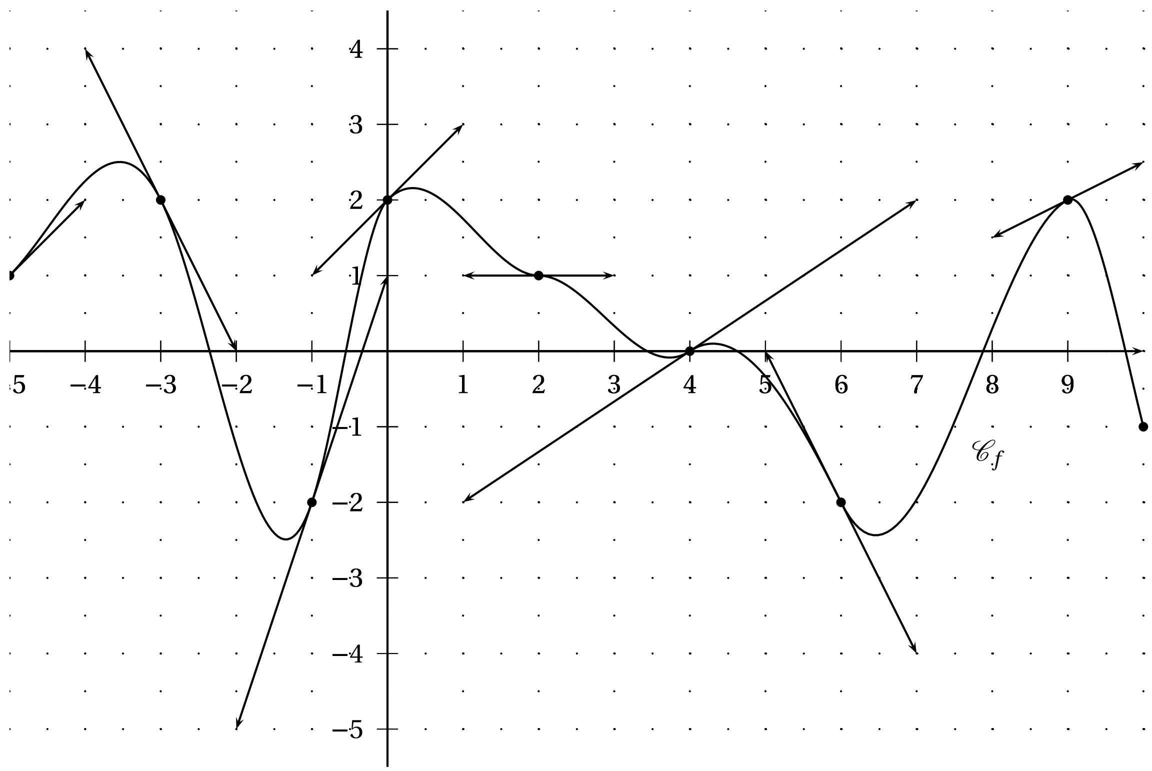
Dans le repère ci-contre, $\mathscr{C}$ est la représentation graphique de f et T_2 la tangente à $\mathscr{C}$ au point A



Exercice 2 : La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f est donnée ci-dessous.
En chacun des points indiqués, $\mathscr{C}_f$ admet une tangente qui est tracée.
Lisez, en vous servant du quadrillage, les nombres suivants :

$$f(-5) \quad f(-3) \quad f(-1) \quad f(0) \quad f(2) \quad f(4) \quad f(6) \quad f(9)$$

$$f'(-5) \quad f'(-3) \quad f'(-1) \quad f'(0) \quad f'(2) \quad f'(4) \quad f'(6) \quad f'(9)$$



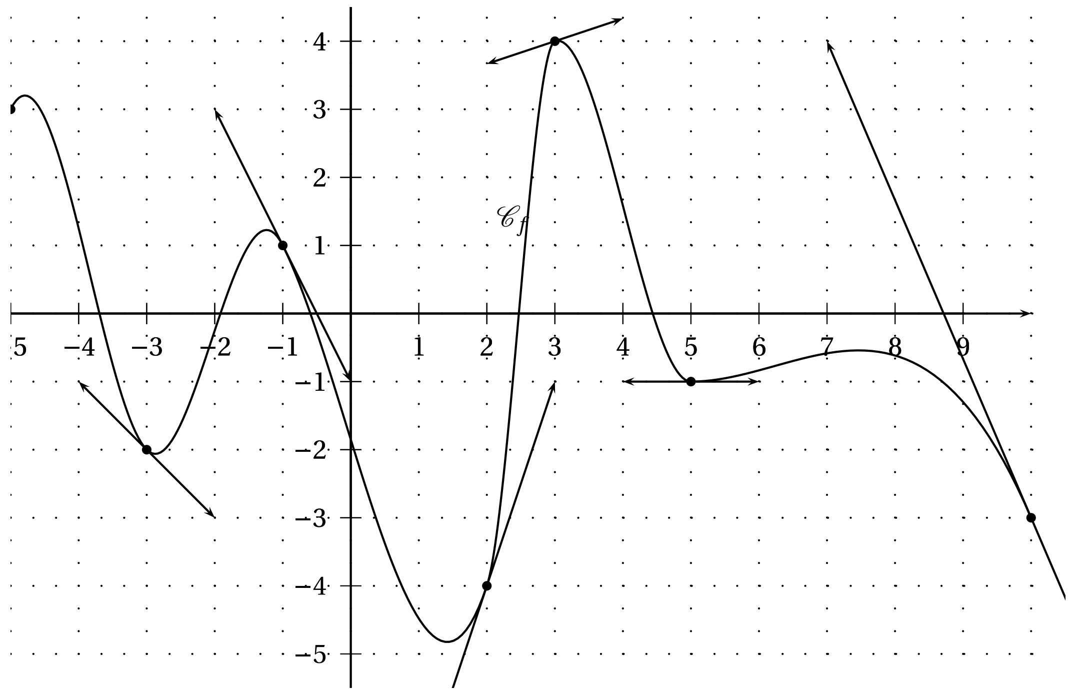
Exercice 3 : La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f est donnée ci-dessous.
En chacun des points indiqués, $\mathscr{C}_f$ admet une tangente qui est tracée. En vous servant du quadrillage :

1. Lisez les nombres suivants :

$$f(-3) \qquad f(-1) \qquad f(2) \qquad f(3) \qquad f(5) \qquad f(10)$$

$$f'(-3) \qquad f'(-1) \qquad f'(2) \qquad f'(3) \qquad f'(5) \qquad f'(10)$$

2. Retrouvez les équations de chacune des tangentes tracées.



Exercice(s) du livre : Repère : n° **43-44-45 (à la calculatrice)** p 74

II.2. Equation de la tangente

Travail de l'élève **4.** On reprend le contexte de l'activité précédente.
Déterminer une équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse :

$$0 \qquad\qquad 1 \qquad\qquad 2 \qquad\qquad a \text{ avec } a > 0$$

Proposition 2.

Une équation de la tangente au point d'abscisse a d'une fonction f dérivable en a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Preuve

On considère une fonction f dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Soit A le point d'abscisse a de $\mathscr{C}_f$.
D'après la partie précédente, l'équation de la tangente T_a à $\mathscr{C}$ passant par A est de la forme :

$$y = mx + p \qquad \text{avec } m = f'(a)$$

De plus, comme $A(a; f(a))$ est un point de T_a, les coordonnées de A vérifient l'équation de T_a :

$$f(a) = f'(a)a + p \Longleftrightarrow p = f(a) - f'(a)a$$

Au final l'équation de T_a est $y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a \Longleftrightarrow y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Exemple :

Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction carré au point d'abscisse 1, -1, 0 et 2.

Exercice 4 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 2x + 1$. Soit $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique. Donner (en justifiant) l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Exercice 5 : Une parabole P admet, dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, une équation du type :

$$y = ax^2 + bx + c \qquad \text{avec } a \neq 0$$

1. Déterminer les coefficients a, b et c sachant que
   - P coupe l'axe des abscisses $(O; \vec{i})$ au point A d'abscisse 3,
   - P coupe l'axe des ordonnées $(O; \vec{j})$ au point B d'ordonnée 2,
   - P admet en B la droite d'équation $y = x + 2$ pour tangente.
2. Contrôler graphiquement vos résultats.
3. Indiquer l'abscisse du second point d'intersection de P avec $(O; \vec{i})$

Exercice 6 :

1. Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = \sin x$ au point d'abscisse 0
2. Tracer T et $\mathscr{C}$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Exercice 7 : On définit sur $[0; \pi]$ les fonctions f_1 et f_2 par $\qquad f_1(x) = \sin x \qquad$ et $\qquad f_2(x) = \cos x$
Démontrer que leurs courbes représentatives admettent au point d'abscisse $\frac{3\pi}{4}$ des tangentes parallèles.

Exercice(s) du livre : Repère : n° **49-50-51** p 76 (tous à la calculatrice)

III) Fonction dérivée

III.1. Définitions

Définition 3 :

On dit qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle I si f est dérivable pour tout $a \in \mathrm{I}$.

Exemple :

Nous avons vu dans un exemple précédent, que la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 3x - 4$ est dérivable pour tout réel a et que son nombre dérivé en a est $f'(a) = 2a + 3$.
On dit donc que cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Il est donc naturel de définir une nouvelle fonction qui à x associe le nombre dérivé $f'(x)$. Cette fonction s'appelle la dérivée de f et se note f'.
La dérivée de la fonction $f : x \longmapsto x^2 + 3x - 4$ est donc $f' : x \longmapsto 2x + 3$ qui est définie sur $\mathbb{R}$.

Définition 4 :

Soit f une fonction dérivable sur I. On appelle fonction dérivée, que l'on note f', la fonction qui à $x \in \mathrm{I}$ associe $f'(x)$.

III.2. Dérivées des fonctions de références

Travail de l'élève **5.** Calculer (s'il existe) le nombre dérivé $f'(a)$ d'une fonction constante $f(x) = k$, d'une fonction affine $g(x) = mx + p$, de la fonction « carré » $h(x) = x^2$, et enfin de la fonction « racine carrée » $s(x) = \sqrt{x}$.
En déduire les fonctions dérivées de chacune, en précisant leur ensemble de définition.

$f(x)$	$f'(x)$	Domaine de dérivabilité
k (nombre fixé)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^2 (fonction carrée)	$2x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$ (fonction inverse)	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$
x^n, $n \in \mathbb{Z}^*$ (fonction puissance)	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$ (fonction racine)	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{+*}$

Preuve

A titre d'exemple, démontrons le pour le cas de la fonction inverse :
Pour tous réels $a \neq 0$ et $h \neq 0$ avec $a+h \neq 0$,

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\dfrac{1}{a+h}-\dfrac{1}{a}}{h} = \frac{a-(a+h)}{ha(a+h)} = \frac{-1}{a(a+h)}$$

ce qui tend vers $-\dfrac{1}{a^2}$ lorsque h tend vers 0.

Exemples :

Calculer la dérivée de la fonction cube et la dérivée de l'inverse de la fonction carré.

« La physique est bien trop dure pour les phycisiens »

DAVID HILBERT, mathématicien