CHAPITRE 2

LE SECOND DEGRÉ

HORS SUJET

TITRE : « Alphaville »

AUTEUR : JEAN LUC GODARD

PRÉSENTATION SUCCINTE : Alphaville, une étrange aventure de Lemmy Caution (ou Alphaville) est un film franco-italien de science-fiction de Jean-Luc Godard sorti en 1965. Il a reçu l'Ours d'or 1965 au Festival international du film de Berlin.

Dans une époque postérieure aux années 1960, les autorités des « pays extérieurs » envoient le célèbre agent secret Lemmy Caution (Eddie Constantine) en mission à Alphaville, une cité déshumanisée, éloignée de quelques années-lumière de la Terre. Caution est chargé de neutraliser le professeur von Braun, tout-puissant maître d'Alphaville, qui y a aboli les sentiments humains. Un ordinateur, Alpha 60, régit toute la ville. Un message de Dickson, un ex-agent secret, ordonne à Lemmy de « détruire Alpha 60 et de sauver ceux qui pleurent ». Mais ce dernier est enlevé, interrogé par Alpha 60 et condamné à mort ...

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

L'ESSENTIEL :

- ⇝ Résoudre des équations du second degré.
- ⇝ Etudier le signe d'un trinôme.
- ⇝ Maitriser l'allure de la courbe d'une fonction polynôme du second degré.

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

CHAPITRE 2 :

LE SECOND DEGRÉ

Au fil du temps

Nous allons étudier les polynômes du second degré, ie de la forme $ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des constantes connues (et $a \neq 0$).
La représentation graphique de ce genre de fonction est une parabole, courbe que l'on retrouve dans la nature, comme par exemple la trajectoire des jets d'eau d'une fontaine, des astres, les rebonds d'une balle de tennis, les dunes de sables dans le désert ... Les antennes pour le câble sont également en forme de parabole, d'où leur nom.
On a découvert les paraboles dès l'antiquité, grâce à *Appolonius de Perga*, qui étudiait les sections planes du cône.
Au V$^{\text{ème}}$ siècle, la pensée mathématique s'épanouit dans le moyen orient, sous l'impulsion géniale d'*Al Khwarizmi*. Son nom est à la base du mot algorithme. En effet, c'est lui qui le premier s'intéressa à mettre en place une méthode générale de résolution d'équations en fonction de leur type.
La nouveauté apportée par Al-Khwarizmi correspond à une véritable évolution des mentalités : il ne s'agit plus de résoudre des problèmes arithmétiques ou géométriques que l'on peut traduire en équations, mais de partir des équations, dont chacune recouvre une classe infinie de problèmes variés.
Il est également le premier à résoudre couramment des équations du second degré dans $\mathbb{R}$. Autrement dit, *Al Khwarizmi* à trouver un algorithme permettant de résoudre toutes les équations de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, et lorsque l'on a sur un problème qui aboutit à une telle équation, il n'y a plus qu'à le suivre ! C'est cet algorithme que nous allons découvrir.
Au XVII^{e} siècle, *Newton* démontre que la trajectoire d'un corps seulement soumis à son poids est une parabole. A cette époque, on sait déjà résoudre depuis environ un siècle les équations du second degré dans un ensemble de nombres que vous découvrirez, contenant $\mathbb{R}$ et de nouveaux nombres, appelés imaginaires (par opposition à réels) ou encore complexes.

I) Trinôme du second degré

Travail de l'élève 1 : Un rectangle a pour périmètre $\mathrm{P} = 21$ m et pour aire $\mathrm{S} = 27\ m^2$. Quels sont les dimensions de ce rectangle ?

Objectifs et commentaires :

- Faire modélisation la situation aux élèves :
  Poser x et y les dimensions de ce rectangle, et obtenir : $x + y = 21$ et $xy = 27$
- Manipuler les écritures littérales et le système pour aboutir à l'équation $x^2 - 10.5x + 27 = 0$
- Les faire s'interroger sur les diverses manières de résoudre une telle équation.
  Graphiquement ? Tableau de valeurs ? Calculs ?

Solution :

La recherche à tâtons ici n'est pas si simple, les élèves ne pensant qu'aux nombres entiers ...
La nécessité de modéliser se fera donc sentir.
Modélisation : Soient x et y les dimensions de ce rectangle, on obtient :

$$x+y=\frac{\mathrm{P}}{2}=10,5 \quad \text{et} \quad xy=\mathrm{S}=27$$

En remplaçant y par $10,5-x$ on obtient l'équation $x(10,5-x)=27$ qui peut s'écrire encore $x^2-10,5x+27=0$.
Comment résoudre une telle équation ?
Notons f la fonction *trinôme* définit par $f(x)=x^2-10,5x+27$ et étudions cette fonction.
Graphiquement : On trace la représentation graphique de la fonction f et on regarde les abscisses des points où cette courbe coupe l'axe des abscisses.
Critique : peu rigoureux.
Faire remarquer aux élèves qu'on peut vérifier l'exactitude des solutions par le calcul.
De plus, leurs connaissances sur les trinômes peuvent cependant leur permettre d'affirmer qu'on trouve ainsi toutes les solutions du problème.
Tableau de valeurs : On fait un tableau de valeurs de la fonction f et on cherche les solutions.
Mêmes remarques que précédemment sur le nombre de solutions.
Par le calcul, en utilisant la forme canonique : (si la classe a de bons souvenirs)

$$\begin{aligned} x^2-10,5x+27=27 &\iff x^2-10,5x=0 \\ &\iff x(x-10,5)=0 \\ &\iff x=0 \quad \text{ou} \quad x=10,5 \end{aligned}$$

On en déduit que $\alpha=\dfrac{0+10.5}{2}=\dfrac{21}{4}$ Et $\beta=f\left(\dfrac{21}{4}\right)=-\dfrac{9}{16}$. Donc

$$f(x)=\left(x-\frac{21}{4}\right)^2-\frac{9}{16}$$

A partir de la forme canonique du trinôme f on résout l'équation $x^2-10,5x+27=0$:

$$\begin{aligned} x^2-10,5x+27=0 &\iff \left(x-\frac{21}{4}\right)^2-\frac{9}{16}=0 \\ &\iff \left(x-\frac{21}{4}\right)^2=\frac{9}{16} \\ &\iff x-\frac{21}{4}=\frac{3}{4} \quad \text{ou} \quad x-\frac{21}{4}=-\frac{3}{4} \\ &\iff x=\frac{24}{4}=6 \quad \text{ou} \quad x=\frac{18}{4}=4.5 \end{aligned}$$

De plus si $x=6$ alors $y=10,5-6=4,5$. Le rectangle a donc pour dimensions 4 et 6.5.
Et si $x=\dfrac{18}{4}=4,5$ alors $y=10,5-4,5=6$. On retrouve les mêmes dimensions (les rôles de x et y étant symétriques).

Conclusion : Le rectangle d'aire $\mathrm{S}=27$ et de périmètre 21 a pour longueur 6 et pour largeur $4,5$.

But du chapitre : On cherche un algorithme qui automatiserait ce genre de démarche.

Définition 1.

On appelle **polynôme du second degré** ou encore **trinôme** toute expression pouvant s'écrire ax^2+bx+c où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$

Exemples :

1. x^2-4x+1 $(a=1; b=-4; c=1)$
2. $-7x^2+4x$ $(a=-7; b=4; c=0)$
3. $\sqrt{2}x^2$ $(a=\sqrt{2}; b=0; c=0)$
4. $(x+1)^2$ $(a=1; b=2; c=1)$

Contre-Exemple :

1. $3x+1$ est un binôme du premier degré
2. x^3+2x+3 est un polynôme du $3^{ème}$ degré
3. $(x+1)^2-x^2$ est un binôme du premier degré.
4. $2x^2+\dfrac{1}{x}$ n'est pas un trinôme du 2^{nd} degré.

Remarque : On admettra que deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients devant « les mêmes puissances de x »

Définition 2.

Soit $\mathrm{P}(x)=ax^2+bx+c$ un trinôme. On appelle **racine** de P toute valeur de la variable x solution de l'équation du second degré :

$$ax^2+bx+c=0$$

Exemples :

1. $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ sont des racines du trinôme de l'exemple précédent.
2. Vérifier que 3 est racine du trinôme $2x^2-5x-3$. En a-t-il d'autre(s) ? En déduire sa forme factorisée.
3. Trouver les racines du polynôme $x^2-7=0$

Question :

D'une manière générale, comment trouver les racines du polynôme ax^2+bx+c ? Existe-t-il un algorithme permettant de trouver toutes les racines de n'importe quel trinôme ?

Exercice(s) du livre : Repère : n° 58 p 32 et 66 p 34 (détermination des coefficients à partir de trois images)

II) Résolution des équations du second degré

II.1. Résolution de l'équation $X^2 = a$

Propriété 1.

L'équation $X^2 = a$ admet :

- ⇝ 2 solutions si $a > 0$: $X_1 = \sqrt{a}$ ou $X_2 = -\sqrt{a}$.
- ⇝ 1 solution si $a = 0$, il s'agit de $X = 0$.
- ⇝ 0 solution si $a < 0$.

Exemples :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $2x^2 - 3 = 0$; **2.** $(4x+1)^2 - 1 = 0$; **3.** $3(x-1)^2 = 7$; **4.** $(x+1)^2 + 1 = 0$

II.2. Résolution de $ax^2+bx+c=0$

Exemple : Trouver les éventuelles racines du trinôme $3x^2+4x-6$

$$
\begin{aligned}
& 3x^2+4x-6=0 \\
\iff\quad & 3\left(x^2+\frac{4}{3}x-2\right)=0 \\
\iff\quad & x^2+\frac{4}{3}x-2=0 \\
\iff\quad & \left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2-2=0 \\
\iff\quad & \left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{9}-2=0 \\
\iff\quad & \left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{22}{9}=0 \\
\iff\quad & \left(x+\frac{2}{3}\right)^2=\frac{22}{9} \\
\iff\quad & x+\frac{2}{3}=\sqrt{\frac{22}{9}} \quad\text{ou}\quad x+\frac{2}{3}=-\sqrt{\frac{22}{9}} \\
\iff\quad & x+\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{22}}{3} \quad\text{ou}\quad x+\frac{2}{3}=-\frac{\sqrt{22}}{3} \\
\iff\quad & x=\frac{\sqrt{22}}{3}-\frac{2}{3} \quad\text{ou}\quad x+\frac{2}{3}=-\frac{\sqrt{22}}{3}-\frac{2}{3} \\
\iff\quad & x=\frac{-2+\sqrt{22}}{3} \quad\text{ou}\quad x+\frac{2}{3}=\frac{-2-\sqrt{22}}{3}
\end{aligned}
$$

Méthode :

- Traduction de l'énoncé
- on factorise par 3
- on divise à droite et à gauche par $3 (3\neq 0)$
- on constate que $x^2+\frac{4}{3}x$ est le début de

  $x^2+2x\times\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\left(x+\frac{2}{3}\right)^2$

  Ainsi $x^2+\frac{4}{3}x=\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2$
- on compte ce que l'on peut
- on utilise le résultat précédent pour trouver les éventuelles valeurs de x possibles

  on oublie pas les **deux** possibilités

  on finit le calcul tranquillement

Cas général :

$$
\begin{aligned}
& ax^2+bx+c=0 \\
\iff\quad & a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0 \\
\iff\quad & x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \\
\iff\quad & \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0 \\
\iff\quad & \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0 \\
\iff\quad & \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c\times 4a}{4a^2}=0 \\
\iff\quad & \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \\
\iff\quad & \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}
\end{aligned}
$$

La suite dépend du signe de $\Delta=b^2-4ac$

- ⇝ Si $\Delta<0$, alors $\frac{\Delta}{4a^2}<0$ et l'équation $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}$ n'a pas de solution réelle.
- ⇝ Si $\Delta=0$, alors $\frac{\Delta}{4a^2}=0$ et l'équation $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}$ équivaut à $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0 \iff x+\frac{b}{2a}=0 \iff x=-\frac{b}{2a}$
- ⇝ Si $\Delta>0$, alors $\frac{\Delta}{4a^2}>0$ et l'équation $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}$ équivaut à $x+\frac{b}{2a}=\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$ ou $x+\frac{b}{2a}=-\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \iff x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

Définition 3. (Discriminant)

On appelle **discriminant** de l'équation $ax^2+bx+c=0$ (avec $a\neq 0$) le nombre réel, noté Δ, qui vaut :

$$\Delta = b^2-4ac$$

Théorème 1.

On cherche à résoudre l'équation $ax^2+bx+c=0$.

1. Si $\Delta<0$: l'équation n'a pas de solution réelle
2. Si $\Delta=0$: l'équation a une solution $x_0=-\dfrac{b}{2a}$
3. Si $\Delta>0$: l'équation a deux solutions réelles :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Preuve

Voir la méthode précédente (attention $\sqrt{4a^2}$ quand $a<0$ n'est pas détaillé à la fin)

Exemples :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $6x^2+x-1=0$
2. $9+x^2+6x=0$
3. $\frac{1}{7}x^2-\frac{1}{7}x-\frac{1}{7}=0$
4. $x^2-5=0$
5. $\frac{2}{5}x-\frac{1}{3}x^2=1$
6. $x^2-2x=0$

Remarques :

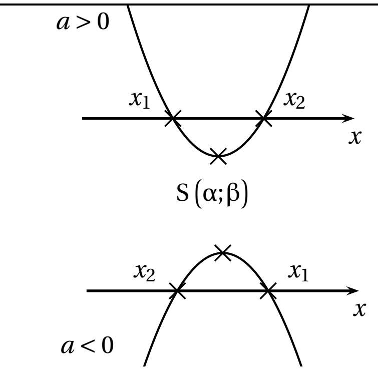
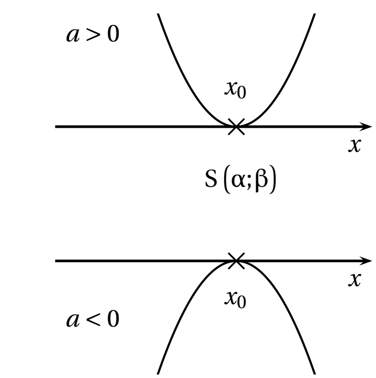
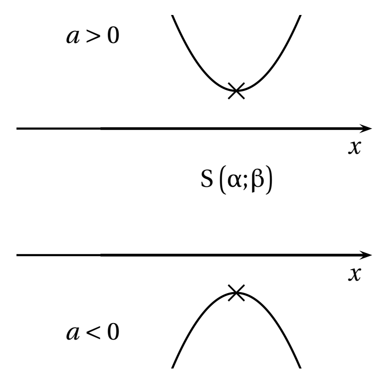
- Les formules obtenues pour $\Delta>0$ s'étendent à $\Delta\geq 0$.
  En effet dans le cas $\Delta=0$, on trouve $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$. On parle de « racine double ».
- Une fois que l'on a les racines d'un trinôme, le signe de a nous donnant l'orientation de la parabole le représentant, il est évident de déterminer son signe.
- Notons également qu'un trinôme se factorise dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\Delta\geq 0$. Dans ce cas on a :
  - Si $\Delta=0$: $ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2$ où x_0 est la racine double du trinôme
  - Si $\Delta>0$: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme

  Lorsque $\Delta<0$, comme le trinôme n'a pas de racine réelle, il faut abandonner l'espoir de pouvoir le factoriser (du moins dans $\mathbb{R}$) sinon, on pourrait trouver des solutions à l'équation produit nulle obtenue.

Preuve

- Si $\Delta=0$: le trinôme s'écrit, à l'aide de la forme canonique : $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$
- Si $\Delta>0$ on a $a(x-x_1)(x-x_2)=a\left(x-\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=ax^2+bx+c$ après développement.

Résumé sur $\mathrm{P}(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$: On note $\Delta = b^2 - 4ac$ On a $\mathrm{P}(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = \mathrm{P}(\alpha) = -\dfrac{\Delta}{4a}$

<table>
<tr><th>Δ</th><th>Racines</th><th>Factorisation</th><th>Signe de $\mathrm{P}(x)$</th><th>Parabole</th></tr>
<tr>
<td>$\Delta > 0$</td>
<td>Deux racines :
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$</td>
<td>$a(x-x_1)(x-x_2)$</td>
<td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>x_1 ou x_2</td><td></td><td>x_2 ou x_1</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>Signe de $\mathrm{P}(x)$</td><td></td><td>Signe de a</td><td>0</td><td>Opposé de a</td><td>0</td><td>Signe de a</td><td></td></tr></table></td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>$\Delta = 0$</td>
<td>Une racine :
$x_0 = \dfrac{-b}{2a}$</td>
<td>$a(x-x_0)^2$</td>
<td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>x_0</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>Signe de $\mathrm{P}(x)$</td><td></td><td>Signe de a</td><td>0</td><td>Signe de a</td><td></td></tr></table></td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>$\Delta < 0$</td>
<td>Aucune
racine
réelle</td>
<td>pas
de
factorisation</td>
<td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>Signe de $\mathrm{P}(x)$</td><td></td><td>Signe de a</td><td></td></tr></table></td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Astuces

- Si b ou c est nul, on sait déjà résoudre ce genre d'équation, plus rapidement. Il est donc inutile de sortir tout l'attirail appris ici, même s'il donne évidemment les mêmes réponses.
- Lorsque l'on doit résoudre une équation avec des coefficients rationnels, pensez à vous ramener à une équation équivalente à coefficients entiers avant de faire tous les calculs !

Exemple :
Etablir la forme factorisée, si elle existe, des trinômes suivants

$$P(x) = 3x^2 + 5x + 1 \quad ; \quad Q(x) = 25x^2 + 80x - 64 \quad \text{et} \quad x^2 - 3x + 5$$

Exemple :
Résoudre les inéquations suivantes

$$x^2 - 4x + 1 \leqslant 0 \quad ; \quad 3x^2 \leq 4x \quad \text{et} \quad 7x^2 - 3x + 2 > 0$$

Exercice 1 : Déterminer les éventuelles racines réelles des trinômes suivants, puis lorsque c'est possible, en donner une factorisation :

1. $x^2 - 2x - 4$
2. $3x^2 + 7 + 10x$
3. $2x^2 - 3x + 5$

Exercice 2 : Déterminer trois entiers relatifs consécutifs dont la somme des carrés vaut 2030. Donner toutes les solutions possibles.

Exercice 3 : Peut-on trouver trois carrés ayant pour côtés des **entiers consécutifs** et dont la somme des aires est 15 125 ? Si oui, préciser quelles sont les valeurs que doivent avoir les côtés.
Même question avec 15 127.

Exercice 4 : Trouver deux nombres entiers dont la somme est égale à 57 et le produit à 540.

Exercice 5 : Soit f la fonction définie sur $[-5; 10]$ par $f(x) = (4 - x)(x + 3)$.

1. Vérifier que f est une fonction trinôme ; décrire l'allure de sa représentation graphique $\mathscr{P}$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$. En déduire les coordonnées du sommet S de $\mathscr{P}$.
3. Dresser le tableau de variation de f. En déduire les solutions de l'inéquation $f(x) < 0$.
4. Pour quelles valeurs de x la parabole est-elle située au dessus de l'axe des abscisses ?

Exercice 6 : Soit f une fonction définie par $f(x) = -3x^2 + 2x + 1$ pour tout réel x.
On note C_f sa représentation graphique dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

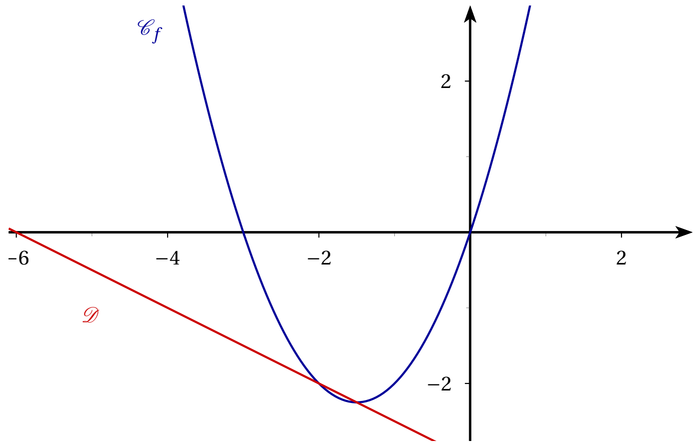
1. Montrer que la courbe C_f coupe l'axe (Ox) en deux points A et B dont on précisera les coordonnées.
2. Déterminer la position relative de $\mathscr{P}$ et (Ox).

Exercice 7 : Dans un repère du plan, on a tracé la parabole $\mathscr{P}$ représentant la fonction

$$f : x \longmapsto x^2 + 3x$$

et la droite

$$\mathscr{D} : y = -0,5x - 3$$

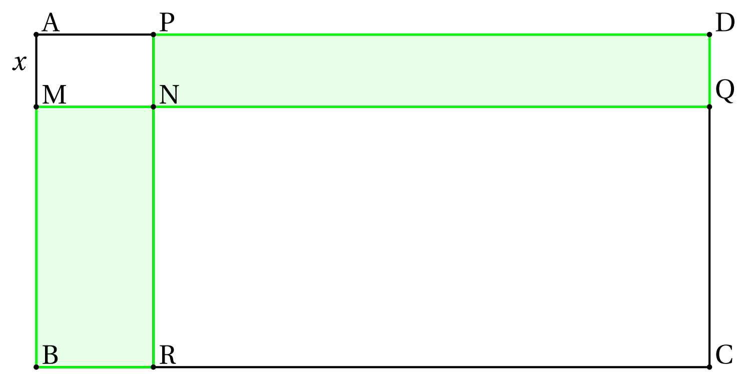


1. Montrer que $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ ont deux point communs et déterminer les coordonnées de ces deux points.
2. Déterminer la position relative de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$

Exercice 8 : Résoudre les (in)équations suivantes :

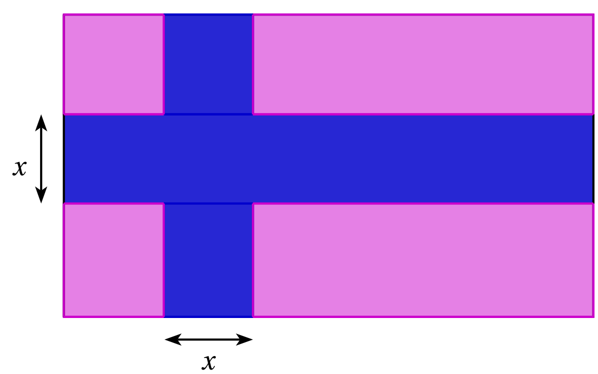
1. $-3x^2 - 5x < 0$
2. $-4x^2 + 36x - 81 \geq 0$
3. $\dfrac{2z-5}{z-1} = \dfrac{z-1}{z+1}$
4. $\sqrt{a+1} = 2a - 3$
5. $(t^2 + 2t + 1)^2 = 16$
6. $(2s+1)(5-s) = (5-s)(s+4)$
7. $\dfrac{3b^2+1}{b^2-3b-10} > 0$
8. $\dfrac{-6x-21}{-x^2-4x-4} > 3$

Exercice 9 : Dans un rectangle ABCD tel que AB = 8 et BC = 10, on construit le carré AMNP avec M sur [AB] et P sur [AD]. On construit ensuite les rectangles MBRN et PNQD avec R sur [BC] et Q sur [DC] que l'on colorie en vert. On pose $x = \text{AM}$; x appartient donc à $[0;8]$.



1. Exprimer en fonction de x l'aire totale $v(x)$ des deux rectangles coloriés en vert.
2. Pour quelle valeur de x, $v(x)$ est-elle maximale et quelle est la valeur de ce maximum ?

Exercice 10 : On considère un drapeau de 3 m sur 5 m, orné d'une croix. Quelle largeur doit-on donner à la croix pour que les parties bleu et rose aient la même aire ?



Exercice 11 :

1. Déterminer selon les valeurs du réel k, le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation :

$$x^2 - 4x - 5 = k$$

2. Déterminer selon les valeurs du réel k, le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation :

$$x^2 + 2x + 4 = kx$$

Exercice 12 : Proposer deux fonctions polynômes du second degré admettant le tableau de variations donné (pour chacune des fonctions on donnera ses racines).

1.

x	$-\infty$	11	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-7	$\nearrow$

2.

x	$-\infty$	$4,5$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	-23	$\searrow$

Exercice 13 :

1. f est le polynôme défini par $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 2x - 1$
   - **a.** Déterminer les réels a, b et c tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, on ait $f(x) = (2x+1)(ax^2 + bx + c)$.
   - **b.** Résoudre alors l'équation $f(x) = 0$
   - **c.** Etablir le tableau de signe de f.
2. - **a.** Trouver une racine évidente x_0 de $g(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$.
   - **b.** Déterminer alors les réels a, b et c tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, on ait $g(x) = (x - x_0)(ax^2 + bx + c)$.
   - **c.** Résoudre $x^3 - x^2 - 14x + 24 \leq 0$

Exercice 14 : Résoudre l'équation : $6x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

*Indication : Poser $\mathrm{X} = x^2$ (ce type d'équation s'appelle une équation **bicarré**)*

Exercice 15 : On considère l'inéquation $3x^4 - 13x^2 + 4 > 0$

1. Déterminer les racines du trinômes $3\mathrm{X}^2 - 13\mathrm{X} + 4$.
2. En déduire une factorisation de $3\mathrm{X}^2 - 13\mathrm{X} + 4$.
3. Résoudre alors l'inéquation proposée dans $\mathbb{R}$.

Exercice 16 : Résoudre l'équation : $x + x^3 + x^5 + x^7 = 0$

Indication : Peut-il y avoir une solution réelle strictement négative ? Et strictement positive ?

Exercice 17 : Résoudre sans utiliser Δ l'équation : $2012x^2 + x - 2013 = 0$

Exercice 18 : **Un problème de Léonard Euler**

J'ai acheté plusieurs pièces de tissu pour 180 écus. Si j'avais acheté pour la même somme trois pièces de tissu de plus, j'aurais eu chaque pièce pour 3 écus de moins. Combien ai-je acheté de pièces de tissu ?

Exercice 19 : **Probabilité et second degré**

On considère une urne contenant trois boules jaunes, deux boules bleues, une boule rouge et m boules vertes. Ces boules sont indiscernables au toucher. On tire, au hasard, une boule de l'urne.

1. Calculer la probabilité des événements suivantes : J = « tirer une boule jaune ». B = « tirer une boule bleue ». R = « tirer une boule rouge ». V = « tirer une boule verte ».
2. En fonction de la couleur tirée, on se voit attribuer une somme d'argent selon la convention suivante, si la boule tirée est :
   - $\rightsquigarrow$ rouge, on gagne 10 €.
   - $\rightsquigarrow$ verte, on gagne $5m$ €
   - $\rightsquigarrow$ jaune ou bleue, on gagne $-1 - 2m$ €.

Soit X la variable aléatoire qui associe, à chaque tirage le gain réalisé.

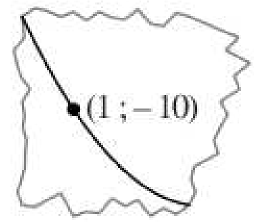
a. Déduire de la question (1) : $p(X=10)$, $p(X=-1-2m)$ et $P(X=5m)$.

b. Calculer m pour que le gain moyen espéré soit de $4,5$ €. En déduire dans ce cas l'écart-type $\sigma(X)$.

Exercice 20 :

Dans le plan rapporté aux axes Ox et Oy en positions usuelles (Ox horizontal et Oy vertical), on a tracé une parabole d'équation $y = ax^2+bx+c$ passant par le point $(1\,;-10)$.
On a alors effacé les axes et une partie de la courbe en ne laissant que le dessin ci-contre.
Parmi les affirmations suivantes, laquelle peut être fausse ?

A) $a>0$ B) $b<0$ C) $a+b+c<0$
D) $b^2>4ac$ E) $c<0$



Exercice(s) du livre : Repère : n° 49-50-59 p 30 (avec paramètre) + n° 68 à 70 p 34 (lien entre des racines) + n° 54 à 56 p 32 (expression à partir du graphique) + n° **75** p 36 (signe d'un trinôme)
Positions relatives : **79** p 37 (retrouver les expressions de f et g en plus) + **80** p 37
Corriger le DM 3bis
Proba : 72-**82** p 205 (espérance de degré 2) + **52-53** p 247 (paramètres de loi binomiale à partir de l'écart type)
Trigo : **121**-124 p 295

III) Algorithme et programmation

Un peu d'histoire

Dans l'antiquité, les mathématiques sont utilisées pour les besoins quotidiens, tels que des calculs d'aires de champs, d'impôts lors des crues du Nil, de constructions. Elles servent aussi à résoudre des problèmes dans lesquels figure une (ou plusieurs) quantité inconnue à trouver.
Vers 1800-1500 avant JC, les Babyloniens savent déjà résoudre des équations du 1^{er} et du 2^{nd} degré. On parle de "chose" à trouver et on suit un discours logique phrasé (peu clair pour nous aujourd'hui) pour arriver à une solution.
Ce n'est qu'au VIII^e siècle, avec l'introduction de la numération positionnelle, des chiffres arabes et du zéro, que la théorie générale prend place peu à peu. Le point de départ est de désigner dans des calculs l'inconnue par un symbole (aujourd'hui souvent la lettre x) puis de mettre en équation les problèmes.
Rapidement, on comprend l'intérêt d'une telle méthode. C'est *Al-Khawarizmi* qui le premier s'intéresse à cela et classifie les différents types d'équations, afin que dans chaque problème, on n'ait plus qu'à reconnaitre le type d'équation et suivre la méthode générale appropriée, menant à la solution. Le mot ***algorithme*** découle de son nom et désigne aujourd'hui ***une procédure à suivre, à partir d'un élément donné, pour arriver à une solution unique***.
Jusqu'au début du XIX^e, trouver des algorithmes de résolutions d'équations constituent la préoccupation principale des algébristes. Ils développent la notation symbolique et la conventionnent : au XVI^e Viete sépare l'alphabet en deux, le début désignant plutôt les paramètres, la fin les inconnues, ce qui est encore utilisé de nos jours. On catégorise les équations suivants leurs paramètres, leur degré et leur nombre d'inconnues, afin de généraliser le plus possible leur résolution.Parallèlement, la notion de fonction prend forme.
Les équations de degré 3 sont résolues par les italiens Tartaglia et Cardan au XVI^e siècle, et celles de degré 4 par l'élève de ce dernier, Ferrari. L'histoire des formules de résolution s'arrête là, car le français Evariste Galois (1811-1832) montre au XIX^e qu'il est impossible de trouver des formules de résolution pour les équations de degré supérieur ou égal à 5.

Exemple : Vocabulaire, démarche et rédaction

On souhaite un algorithme qui donne le type d'extremum d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, sa valeur approchée et quand il est atteint.

1. **Analyse préliminaire**
   - **a.** Quelles sont les informations initiales dont nous avons besoin ?
     On les appelle les *entrées* de l'algorithme.
   - **b.** Quelle condition avons-nous sur l'une de ces entrées ?
   - **c.** Que doit-on calculer ?
     On prendra l'habitude de faire afficher le(s) résultat(s) de l'algorithme, que l'on appelle *sortie(s)*.
     L'ensemble des données de l'algorithme pouvant variées (entrées-sorties) sont les *variables*.
2. **Compréhension de l'algorithme :** Compléter l'algorithme suivant

Algorithme 1 : *Extremum d'un trinôme*

Variables
....., ..., ..., ..., ... sont des nombres réels

Début
Saisir ....
Tant que (.........) **Faire**
Afficher "Erreur : ...."
Saisir ....
Fin Tant que
Saisir .... et ....
Affecter à .... la valeur .....
Affecter à .... la valeur .....
Si (........) **Alors**
Afficher "La fonction f admet pour .... "
Sinon
Afficher "La fonction f admet pour .... "
Fin Si
Afficher ...... " atteint en " ......
Fin

3. **La programmation : sur Algobox et sur TI**
   Trouver comment programmer cet algorithme sur Algobox et sur votre calculatrice (ie avec le vocabulaire adapté au support) .

Exercice 21 : Ecrire un algorithme qui donne la valeur du Δ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, ainsi que son nombre de racines éventuelles et leurs valeurs.
Le programmer sur votre calculatrice.

Hors Programme : polynômes de degré quelconque

Remarque : Le vocabulaire découvert ici est le même que celui employé pour un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ quelconque, ie de la forme

$$\mathrm{P}(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \text{ où } a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n \text{ sont des réels avec } a_n \neq 0$$

- Les éventuelles solutions de l'équation $\mathrm{P}(x) = 0$ s'appellent encore les racines de P.
- Le discriminant (s'il existe, ie si $n \geq 4$) se notera encore Δ, mais s'obtiendra par une autre formule.

On peut également démontrer que deux polynômes sont égaux si et seulement s'ils ont le même degré et les mêmes coefficients.
Enfin si x_1 est une racine de P, alors on peut montrer que P est factorisable par $(x - x_1)$.

Exemple :

- La fonction P définie par : $P(x) = x^8 - 6x^7 + 3x^2 - 5$ est une fonction polynôme de degré 8
- Toutes les fonctions puissances d'exposants entiers : $P(x) = x^p$ avec $p \in \mathbb{N}$ sont des fonctions polynômes de degré p.
- Les fonctions affines et constantes (différente de la fonction nulle) sont des fonctions polynômes de degré 1 et 0

Contre-Exemple :

- La fonction Q définie par $Q(x) = x^3 + \dfrac{2}{x}$ n'est pas une fonction polynôme
- La fonction g définie par $g(x) = \dfrac{x^4-1}{x^2-1}$ n'est pas une fonction polynôme car non définie pour $x = 1$ ou $x = -1$
- En revanche la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{x^4-1}{x^2+1}$ est une fonction polynôme de degré 2 puisque $h(x) = x^2 - 1$

Exemple :

Trouver les racines du polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = (x-1)(x^2 - x - 1)$

Remarque :

- Les fonctions polynôme de degré 1 ($x \longmapsto ax + b$) admettent toutes une seule racine $\lambda = -\dfrac{b}{a}$
- Certaines fonctions polynômes n'ont aucune racine réelle, par exemple P avec $P(x) = x^2 + 1 \geq 1$.

« La physique est bien trop dure pour les phycisiens »

DAVID HILBERT, mathématicien