Exercices
Le second degré

Exercice 1 : Déterminer les éventuelles racines réelles des trinômes suivants, puis lorsque c'est possible, en donner une factorisation :

1. $x^2 - 2x - 4$
2. $3x^2 + 7 + 10x$
3. $2x^2 - 3x + 5$

Exercice 2 : Déterminer trois entiers relatifs consécutifs dont la somme des carrés vaut 2030. Donner toutes les solutions possibles.

Exercice 3 : Peut-on trouver trois carrés ayant pour côtés des **entiers consécutifs** et dont la somme des aires est 15 125 ? Si oui, préciser quelles sont les valeurs que doivent avoir les côtés.
Même question avec 15 127.

Exercice 4 : Trouver deux nombres entiers dont la somme est égale à 57 et le produit à 540.

Exercice 5 : Soit f la fonction définie sur $[-5;10]$ par $f(x) = (4-x)(x+3)$.

1. Vérifier que f est une fonction trinôme ; décrire l'allure de sa représentation graphique $\mathscr{P}$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$. En déduire les coordonnées du sommet S de $\mathscr{P}$.
3. Dresser le tableau de variation de f. En déduire les solutions de l'inéquation $f(x) < 0$.
4. Pour quelles valeurs de x la parabole est-elle située au dessus de l'axe des abscisses ?

Exercice 6 : Soit f une fonction définie par $f(x) = -3x^2 + 2x + 1$ pour tout réel x.
On note C_f sa représentation graphique dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. Montrer que la courbe C_f coupe l'axe (Ox) en deux points A et B dont on précisera les coordonnées.
2. Déterminer la position relative de $\mathscr{P}$ et (Ox).

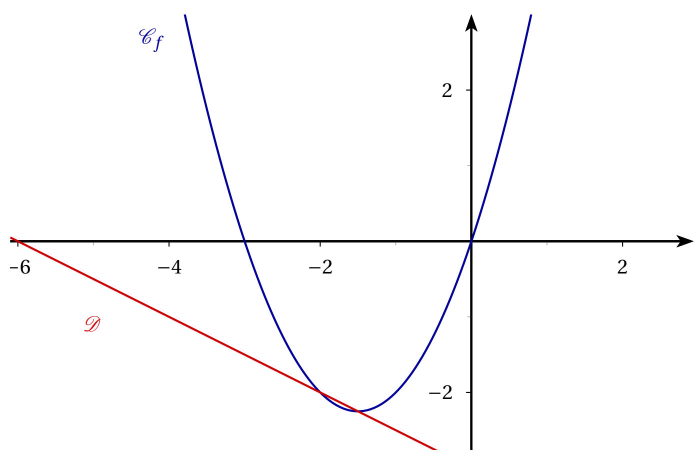
Exercice 7 : Dans un repère du plan, on a tracé la parabole $\mathscr{P}$ représentant la fonction

$$f : x \longmapsto x^2 + 3x$$

et la droite

$$\mathscr{D} : y = -0,5x - 3$$

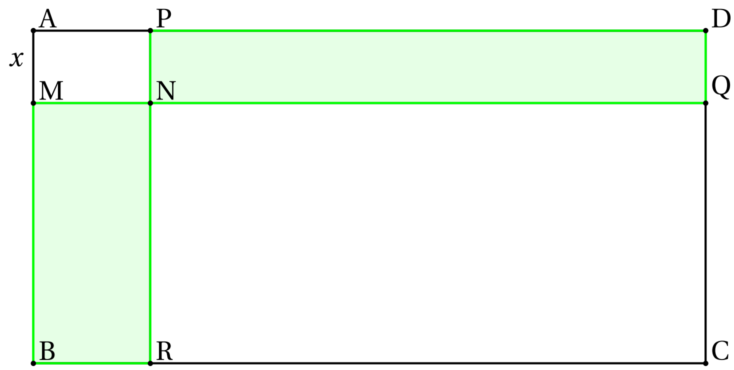
1. Montrer que $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ ont deux point communs et déterminer les coordonnées de ces deux points.
2. Déterminer la position relative de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$



Exercice 8 : Résoudre les (in)équations suivantes :

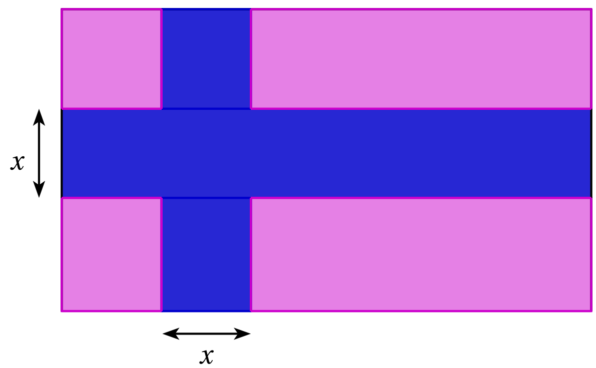
1. $-3x^2 - 5x < 0$
2. $-4x^2 + 36x - 81 \geq 0$
3. $\dfrac{2z-5}{z-1} = \dfrac{z-1}{z+1}$
4. $\sqrt{a+1} = 2a - 3$
5. $(t^2 + 2t + 1)^2 = 16$
6. $(2s+1)(5-s) = (5-s)(s+4)$
7. $\dfrac{3b^2+1}{b^2-3b-10} > 0$
8. $\dfrac{-6x-21}{-x^2-4x-4} > 3$

Exercice 9 : Dans un rectangle ABCD tel que AB = 8 et BC = 10, on construit le carré AMNP avec M sur [AB] et P sur [AD]. On construit ensuite les rectangles MBRN et PNQD avec R sur [BC] et Q sur [DC] que l'on colorie en vert. On pose $x = \text{AM}$; x appartient donc à $[0;8]$.



1. Exprimer en fonction de x l'aire totale $v(x)$ des deux rectangles coloriés en vert.
2. Pour quelle valeur de x, $v(x)$ est-elle maximale et quelle est la valeur de ce maximum ?

Exercice 10 : On considère un drapeau de 3 m sur 5 m, orné d'une croix. Quelle largeur doit-on donner à la croix pour que les parties bleu et rose aient la même aire ?



Exercice 11 :

1. Déterminer selon les valeurs du réel k, le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation :
$$x^2 - 4x - 5 = k$$
2. Déterminer selon les valeurs du réel k, le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation :
$$x^2 + 2x + 4 = kx$$

Exercice 12 : Proposer deux fonctions polynômes du second degré admettant le tableau de variations donné (pour chacune des fonctions on donnera ses racines).

1.

x	$-\infty$		11		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	-7	$\nearrow$	

2.

x	$-\infty$		$4,5$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	-23	$\searrow$	

Exercice 13 :

1. f est le polynôme défini par $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 2x - 1$
   - **a.** Déterminer les réels a, b et c tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, on ait $f(x) = (2x+1)(ax^2 + bx + c)$.
   - **b.** Résoudre alors l'équation $f(x) = 0$
   - **c.** Etablir le tableau de signe de f.
2. - **a.** Trouver une racine évidente x_0 de $g(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$.
   - **b.** Déterminer alors les réels a, b et c tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, on ait $g(x) = (x - x_0)(ax^2 + bx + c)$.
   - **c.** Résoudre $x^3 - x^2 - 14x + 24 \leq 0$

Exercice 14 : Résoudre l'équation : $6x^4 - 5x^2 + 1 = 0$
Indication : Poser $X = x^2$ *(ce type d'équation s'appelle une équation* ***bicarré****)*

Exercice 15 : On considère l'inéquation $3x^4 - 13x^2 + 4 > 0$

1. Déterminer les racines du trinômes $3X^2 - 13X + 4$.
2. En déduire une factorisation de $3X^2 - 13X + 4$.
3. Résoudre alors l'inéquation proposée dans $\mathbb{R}$.

Exercice 16 : Résoudre l'équation : $x + x^3 + x^5 + x^7 = 0$
Indication : Peut-il y avoir une solution réelle strictement négative ? Et strictement positive ?

Exercice 17 : Résoudre sans utiliser Δ l'équation : $2012x^2 + x - 2013 = 0$

Exercice 18 : **Un problème de Léonard Euler**
J'ai acheté plusieurs pièces de tissu pour 180 écus. Si j'avais acheté pour la même somme trois pièces de tissu de plus, j'aurais eu chaque pièce pour 3 écus de moins. Combien ai-je acheté de pièces de tissu ?

Exercice 19 : **Probabilité et second degré**
On considère une urne contenant trois boules jaunes, deux boules bleues, une boule rouge et m boules vertes. Ces boules sont indiscernables au toucher. On tire, au hasard, une boule de l'urne.

1. Calculer la probabilité des événements suivantes : J = « tirer une boule jaune ». B = « tirer une boule bleue ». R = « tirer une boule rouge ». V = « tirer une boule verte ».
2. En fonction de la couleur tirée, on se voit attribuer une somme d'argent selon la convention suivante, si la boule tirée est :
   - rouge, on gagne 10 €.
   - verte, on gagne $5m$ €
   - jaune ou bleue, on gagne $-1 - 2m$ €.

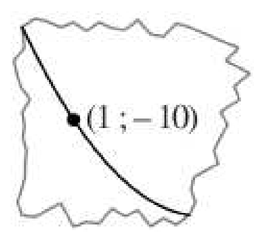
   Soit X la variable aléatoire qui associe, à chaque tirage le gain réalisé.

   a. Déduire de la question (1) : $p(X = 10)$, $p(X = -1 - 2m)$ et $P(X = 5m)$.

   b. Calculer m pour que le gain moyen espéré soit de $4,5$ €. En déduire dans ce cas l'écart-type $\sigma(X)$.

Exercice 20 :

Dans le plan rapporté aux axes Ox et Oy en positions usuelles (Ox horizontal et Oy vertical), on a tracé une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passant par le point $(1 ; -10)$.
On a alors effacé les axes et une partie de la courbe en ne laissant que le dessin ci-contre.
Parmi les affirmations suivantes, laquelle peut être fausse ?
A) $a > 0$ B) $b < 0$ C) $a + b + c < 0$
D) $b^2 > 4ac$ E) $c < 0$



Exercice 21 : Ecrire un algorithme qui donne la valeur du Δ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, ainsi que son nombre de racines éventuelles et leurs valeurs.
Le programmer sur votre calculatrice.