Rappels

Soient a et h deux réels tels que $h \neq 0$.

1. Si **existe et est un nombre réel** ℓ, alors le nombre dérivé en a de la fonction f est le nombre ℓ, noté $f'(a)$. Ainsi, dans ce cas, on a :

$$f'(a) =$$

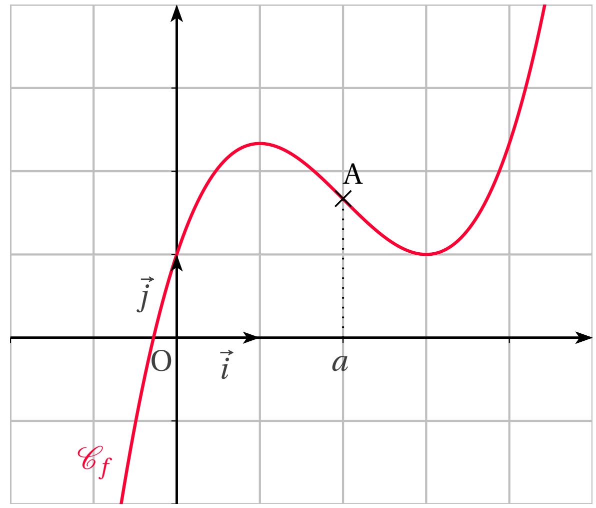
2. Graphiquement, si f est dérivable en a, alors $f'(a)$ est

   Plus exactement, l'équation réduite de cette tangente est :

3. f est dérivable sur un intervalle I si f est dérivable en tout a appartenant à I.
   On note f' la fonction ainsi définie, qui à tout $x \in \mathrm{I}$ associe le nombre dérivé $f'(x)$.

$f(x)$	$f'(x)$	Domaine de dérivabilité
k (nombre fixé)		$\mathbb{R}$
x		$\mathbb{R}$
$ax+b$ (a et b fixés)		$\mathbb{R}$
x^2		$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$		$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$
x^n, $n \in \mathbb{Z}^*$		$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$		$]0;+\infty[$

Travail de l'élève 1 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$.
Sur Géogébra, on a tracé la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f et placé un point $\mathrm{A} \in \mathscr{C}_f$, d'abscisse a.



1. **Rappels :**
   - **a.** Donner l'ordonnée de A en fonction de a.
   - **b.** On donne $f'(x) = x^2 - 4x + 3$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
     En déduire les équations des tangentes à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a pour $a = 0$, $a = 2$, $a = 4$ et $a = -1$.
2. **Lien entre la dérivée f' de f et les variations de f :**
   Sur Géogébra, on a désormais tracé la tangente T en A à la courbe $\mathscr{C}_f$.
   - **a.** En observant la figure dynamique vidéo-projetée, conjecturer :
     - i. Les valeurs de a pour lesquelles $f'(a) = 0$ $f'(a) > 0$ et $f'(a) < 0$.
     - ii. Le tableau de signes de la fonction f'.
     - iii. Le tableau de variations de f.
   - **b.** Quel lien peut-on remarquer entre ces deux tableaux ? L'expliquer de façon intuitive.
   - **c.** On a désormais tracé la courbe Γ représentative de la fonction f' et placé un point $\mathrm{M} \in \Gamma$, de la même abscisse que A, donc $x_\mathrm{M} = a$.
     - i. Quelle est l'ordonnée de M ?
     - ii. Que se passe-t-il pour la fonction f sur un intervalle où la courbe Γ est en-dessous de l'axe des abscisses ? Au dessus ? Quand elle coupe l'axe des abscisses ?
3. **Applications :**
   - **a.** On donne le tableau de signes sur $\mathbb{R}$ de la dérivée g' d'une fonction g.

x	$-\infty$		2		6		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de g							

     On sait de plus que $g(2) = -3$ et $g(6) = 4$. Conjecturer le tableau de variation de g.
4. On appelle h la fonction cube.
   - **a.** En utilisant le signe de h', retrouver les variations de h.
   - **b.** Que se passe-t-il pour h quand $h'(x) = 0$? Quelle est la différence avec les fonctions vues précédemment ?

Théorème 1.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I

1. f est **strictement croissante** sur I si, et seulement si $\forall x \in \mathrm{I}$ on a
2. f est **constante** sur I si, et seulement si $\forall x \in \mathrm{I}$ on a
3. f est **strictement décroissante** sur I si, et seulement si $\forall x \in \mathrm{I}$ on a

Exemple :

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^2+1}{-3x^2+2x-1}$$

1. Déterminer le domaine de définition de fonction f.
2. On donne pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{2\left(x^2+2x-1\right)}{\left(-3x^2+2x-1\right)^2}$$

   a. Etablir le tableau de signes de f'.
   b. En déduire les tableaux de variations de f.
   c. Vérifier graphiquement à la calculatrice vos résultats.

Travail de l'élève 2 : Soient f, g et h les fonctions définies par :

$$u(x) = 5x-7 \qquad v(x) = -3x^2+2x-1 \qquad f(x) = (5x-7)(-3x^2+2x-1) \qquad g(x) = \frac{5x-7}{-3x^2+2x-1}$$

1. Déterminer les domaines de définition des fonctions u, v, f et g.
2. On donne

$$u'(x) = 5 \qquad v'(x) = -6x+2 \qquad f'(x) = -45x^2+62x-19 \qquad g'(x) = \frac{15x^2-42x+9}{(5x-7)^2}$$

   a. Aviez-vous les formules nécessaires pour retrouver u', v', f' et g' ?
   b. Calculer et simplifier $u'v+v'u$. Que constatez-vous ?
   c. Calculer et simplifier $u'v-v'u$. Que constatez-vous ?
   d. Etablir les tableaux de signes de f' et g'.
   e. En déduire les tableaux de variations de f et g.

On a déjà vu le côté pratique de connaître les fonctions dérivées pour établir les variations d'une fonction. Voyons désormais quelques formules pour trouver les dérivées plus simplement qu'avec la limite du taux de variations.

Dans le tableau suivant, u et v sont deux **fonctions** dérivables sur un intervalle I et k désigne un nombre réel.
Remarquons que les fonctions ci-dessous sont dérivables sur I.

Fonctions	**Dérivées**
ku	
$u+v$	
$u\times v$	
u^n, $n\in\mathbb{Z}^*$	
$\dfrac{1}{v}$	
$\dfrac{u}{v}$	

Exemples :

Identifier les fonctions u et v dans les fonctions suivantes, puis les dériver, en précisant les domaines de définitions :

1. $f_1(x)=5x^3$
2. $f_2(x)=-2x+\dfrac{1}{x}$
3. $f_3(x)=3x^2\sqrt{x}$
4. $f_4(x)=(5x^2-2x+3)^7$
5. $f_5(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$
6. $f_6(x)=\dfrac{3x+2}{4-2x}$