∾ Révision Bac Blanc 3 ∾
Arithmétique et codage

Exercice 1.

1. On considère l'équation (E) :
$$109x - 226y = 1$$
où x et y sont des entiers relatifs.
   (a) Déterminer le pgcd de 109 et 226. Que peut-on en conclure pour l'équation (E) ?
   (b) Déterminer une solution particulière de l'équation (E).
   (c) Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).
   (d) En déduire l'unique couple d'entiers relatifs solutions de l'équation $(d; e)$ tel que :
$$\begin{cases} 0 < d \leq 226 \\ 0 < e \leq 226 \\ 109d = 1 + 226e \end{cases}$$
2. Démontrer que 227 est un nombre premier.
3. On note A l'ensemble des 227 entiers naturels compris entre 0 et 226.
On considère deux codages désignés par les lettres f et g définies de la manière suivante :
   – à tout entier x de A, le codage f associe le reste de la division euclidienne de x^{109} par 227.
   – à tout entier x de A le codage g associe le reste de la division euclidienne de x^{141} par 227.

   On applique le codage f suivi du codage g et on note $g[f(x)]$ le résultat ainsi obtenu.
Par exemple, si on choisit $x = 2$ on applique le codage f :
$$2^{109} \equiv 156[227] \Longrightarrow f(2) = 156$$
Si on applique le codage g :
$$156^{141} \equiv 2[227] \Longrightarrow g(156) = 2$$
Ainsi
$$g[f(2)] = g(156) = 2$$
   (a) Vérifier que $g[f(0)] = 0$.
   (b) On rappelle le résultat suivant appelé petit théorème de Fermat :
   Si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p alors $a^{p-1} \equiv 1[p]$.
   Montrer que, quel que soit l'entier non nul x de A, $x^{226} \equiv 1[227]$.
   (c) En utilisant 1.(d), en déduire que, quel que soit l'entier non nul x de A on a :
$$g[f(x)] = x$$