∽ EXERCICES ∾
LE CALCUL INTÉGRAL

I. Intégrations et généralités

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une figure :

1. $I_1 = \int_a^b k\,dx$ si $k > 0$.
2. $I_2 = \int_0^4 (3-x)\,dx$.
3. $I_3 = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.
4. $I_4 = \int_0^2 (x+1)\,dx$

Exercice 2. Calculer les intégrales proposées (Vérifier que chacune des fonctions est positive sur l'intervalle considérée) :

1. $I_5 = \int_0^1 (5x^2+3x)\,dx$
2. $I_6 = \int_{-1}^1 x^2\,dx$
3. $I_7 = \int_{-1}^1 (x^2-3x+8)\,dx$
4. $I_8 = \int_0^1 (x^2-x)\,dx$

Exercice 3.

1. Prouvez que, pour tout $t \in [0,1]$, $\dfrac{t^2}{2} \leq \dfrac{t^2}{1+t} \leq t^2$.
2. Déduisez-en un encadrement de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{1+t}\,dt$.

Exercice 4. Soit f une fonction continue et positive sur $[0;1]$ telle que, pour tout $x \in [0;1]$, il existe deux réels m et M tels que :

$$m \leq f(x) \leq M$$

Déterminer la limite de la suite de terme général :

$$u_n = \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\,dx$$

Exercice 5. Etudier la limite de la suite de terme général

$$u_n = \int_n^{n+1} e^{-x}\,dx$$

Vous pourrez commencer par encadrer e^{-x} sur $[n;n+1]$ en fonction de n.

Exercice 6. On pose

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^{-x}\,dx \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Prouver que

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!}\int_0^1 e^{-x}\,dx$$

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

Exercice 7.

1. **Vrai ou faux ?** L'intégrale d'une fonction continue et impaire est nulle.
2. **Vrai ou faux ?** Si $\int_{-2}^{2} f(t)dt = 0$, alors f est impaire.
3. Trouvez une fonction paire, non identiquement nulle sur $[-2,2]$, telle que $\int_{-2}^{2} f(t)dt = 0$.
4. **Vrai ou faux ?** Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, alors $\int_{1}^{x} f(t)dt$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.
5. Trouvez une fonction telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \int_{1}^{x} f(t)dt = +\infty$
6. Trouvez une fonction telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \int_{1}^{x} f(t)dt = 32$
7. **Vrai ou faux ?**Soit u un réel strictement positif, alors $\int_{0}^{u} \mathrm{E}(x)\,dx \in \mathbb{N}$, $\mathrm{E}(x)$ désignant la *partie entière* de x.
8. Trouvez une fonction telle que $\left|\int_{a}^{b} f(t)dt\right| = \int_{a}^{b} \left|f(t)\right| dt$
9. Trouvez une fonction f telle que $\left|\int_{a}^{b} f(t)dt\right| < \int_{a}^{b} \left|f(t)\right| dt$
10. Trouvez une *condition nécessaire et suffisante* sur f pour que $\left|\int_{a}^{b} f(t)dt\right| = \int_{a}^{b} \left|f(t)\right| dt$
11. **Vrai ou faux ?** $\int_{2}^{3} xt^2 dt = \int_{2}^{3} xt^2\, dx$
12. **Vrai ou faux ?** $\int_{2}^{3} xt^2 dt = \int_{2}^{3} x^2 t\, dx$
13. Trouvez deux fonctions f et g continues sur $[1,2]$, distinctes, telles que $\int_{1}^{2} f(t)dt = \int_{1}^{2} g(u)du$
14. **Vrai ou faux ?** Si f est bornée sur $[a,b]$, alors la fonction $x \mapsto \int_{a}^{x} f(u)du$ l'est aussi.
15. **Vrai ou faux ?** Si f est croissante sur $[a,b]$, alors la fonction $x \mapsto \int_{a}^{x} f(u)du$ l'est aussi.
16. Déterminez une fonction polynôme de degré supérieur ou égal à 2 et dont la valeur moyenne sur $[-2\,;\,2]$ est 0.

Exercice 8. Si vous reconnaissez une forme du style $u'u^n$, alors une primitive sera

$$\frac{u^{n+1}}{n+1}$$

En déduire une primitive de f avec

$$f(x) = \frac{3}{(x-1)^2}$$

Exercice 9. f est la fonction définie sur $\mathrm{I}[-1;8]$ par :

$$f(x) = \frac{2x^3+8x^2+8x-3}{x^2+4x+4}$$

1. Démontrer que pour tout $x \in \mathrm{I}$ on a

$$f(x) = 2x - \frac{3}{(x+2)^2}$$

2. (a) En déduire une primitive G de f sur I.
   (b) Calculer la primitive F de f telle que $F(0) = 2$.

Exercice 10. Etudier si F est une primitive de f sur I :

1. $f(x) = \dfrac{2x^2+8x-5}{(x^2+x+3)^2}$ et $F(x) = \dfrac{x^2-x+2}{x^2+x+3}$ avec $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = \dfrac{2x-3}{2x\sqrt{x}}$ et $F(x) = \dfrac{2x+3}{\sqrt{x}}$ avec $I =]0;+\infty[$.
3. $f(q) = \dfrac{3q-4}{\sqrt{2q-4}}$ et $F(q) = q\sqrt{2q-4}$ avec $I =]2;+\infty[$.

Exercice 11.

1. f est la fonction définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x) = -\dfrac{2}{(x-2)^2}$.
   Calculer une primitive F de f sur $]2;+\infty[$.
2. G est la fonction définie sur $]2;+\infty[$ par $G(x) = \dfrac{3x-4}{x-2}$.
   Calculer la fonction dérivée de G.
3. Que peut-on en déduire pour les fonctions F et G ?
   Vérifier ce résultat en calculant $F(x) - G(x)$.

Exercice 12. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de :

1. $g : x \longmapsto \dfrac{3x}{\sqrt{x^2-1}}$
2. $h : x \longmapsto \dfrac{e^x+3}{(e^x+3x)^3}$
3. $k : x \longmapsto \dfrac{1}{(ax+b)^2}$
4. $f : x \longmapsto \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$
5. $j : x \longmapsto e^{3x+2}$
6. $l : x \longmapsto (2x+1)e^{x^2+x+7}$
7. $m : x \longmapsto \sin(3x) + 3\cos(2x)$

Exercice 13. Calculer une primitive de f_i dans les cas suivants :

1. $f_1(x) = \dfrac{x+1}{(x^2+2x+2)^3}$
2. $f_2(x) = \dfrac{\ln x}{x}$
3. $f_3(x) = \tan x$
4. $f_4(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$

II. Intégration avec primitives

Exercice 14. On rappelle que

$$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$$

Démontrer que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 15. Démontrer que

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\sin t| \, dt = 2$$

[1]

Exercice 16. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 x e^{-x^2} dx$
2. $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{\ln t}{t} dt$
3. $\displaystyle\int_2^4 \frac{e^t}{e^t+1} dt$
4. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$

Exercice 17. Calculer la valeur moyenne de la fonction f définie sur l'intervalle $[e; e^2]$ par

$$f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$$

Exercice 18. La capacité pulmonaire de l'être humain suivant son âge x de 10 à 90 ans, s'exprime, en litres, au moyen de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{110(\ln x - 2)}{x}$$

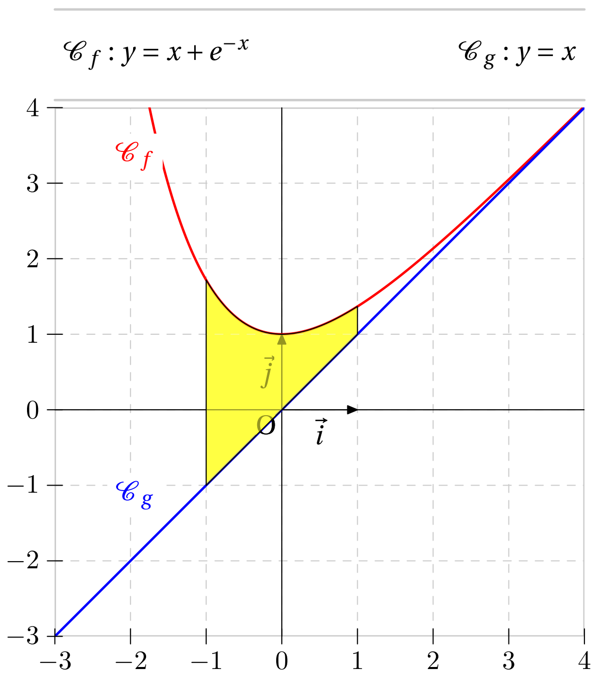
Déterminer la valeur moyenne de la capacité pulmonaire entre 20 et 70 ans, à 0,1 litre près par défaut.

1. On utilisera la relation de Chasles afin de supprimer les valeurs absolues.

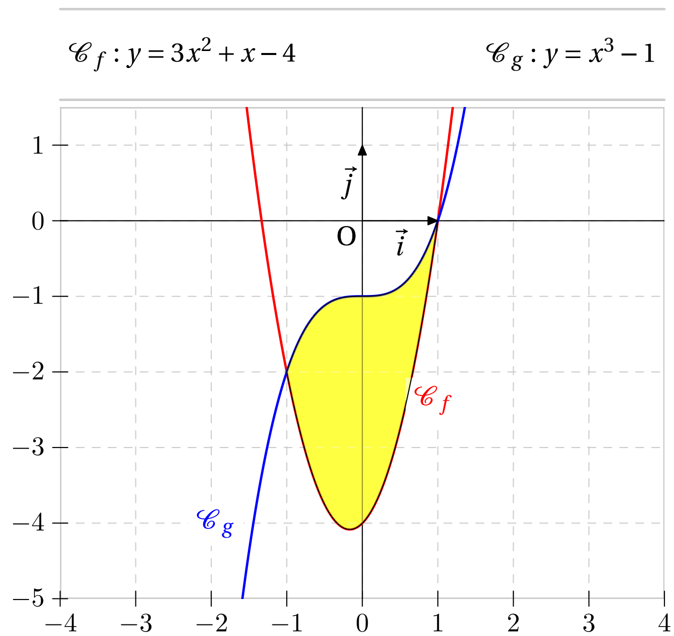
III. Calculs d'aires et de volumes

Exercice 19. Calculer l'aire en unité d'aire de chacun des domaines $\mathscr{D}$ colorés en jaune.

1.



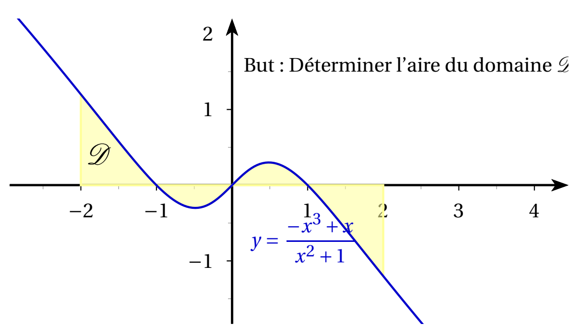
2.



Exercice 20. Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère la courbe $\mathscr{C}$ d'équation

$$y = \frac{-x^3 + x}{x^2 + 1}$$

1. Démontrer que $\mathscr{C}$ a une asymptote Δ en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Déterminer l'aire, en unité d'aire, du domaine $\mathscr{D}$ compris entre $\mathscr{C}$, Δ et les droites d'équations $x = 2$ et $x = -2$.



Exercice 21. L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère le cône d'axe (Oz), de sommet A, de hauteur h dont la base est le disque de centre O et de rayon r. Tout plan d'équation $z = t$, avec $t \in [0; h]$, coupe le cône suivant un disque $\mathscr{D}$ d'aire $S(t)$.

1. Déterminer le rapport de l'homothétie de centre A transformant la base du cône en $\mathscr{D}$, et en déduire $S(t)$ en fonction de r, t et h.
2. Déterminer, à l'aide d'une intégrale, le volume du cône en unités de volume.

IV. Annales

Exercice 1. **Pondichéry 2013**

Partie 1

On s'intéresse à l'évolution de la hauteur d'un plant de maïs en fonction du temps. Le graphique en annexe 1 représente cette évolution. La hauteur est en mètres et le temps en jours.

On décide de modéliser cette croissance par une fonction logistique du type :

$$h(t) = \frac{a}{1 + b\mathrm{e}^{-0,04t}}$$

où a et b sont des constantes réelles positives, t est la variable temps exprimée en jours et $h(t)$ désigne la hauteur du plant, exprimée en mètres.

On sait qu'initialement, pour $t = 0$, le plant mesure $0,1$ m et que sa hauteur tend vers une hauteur limite de 2 m.

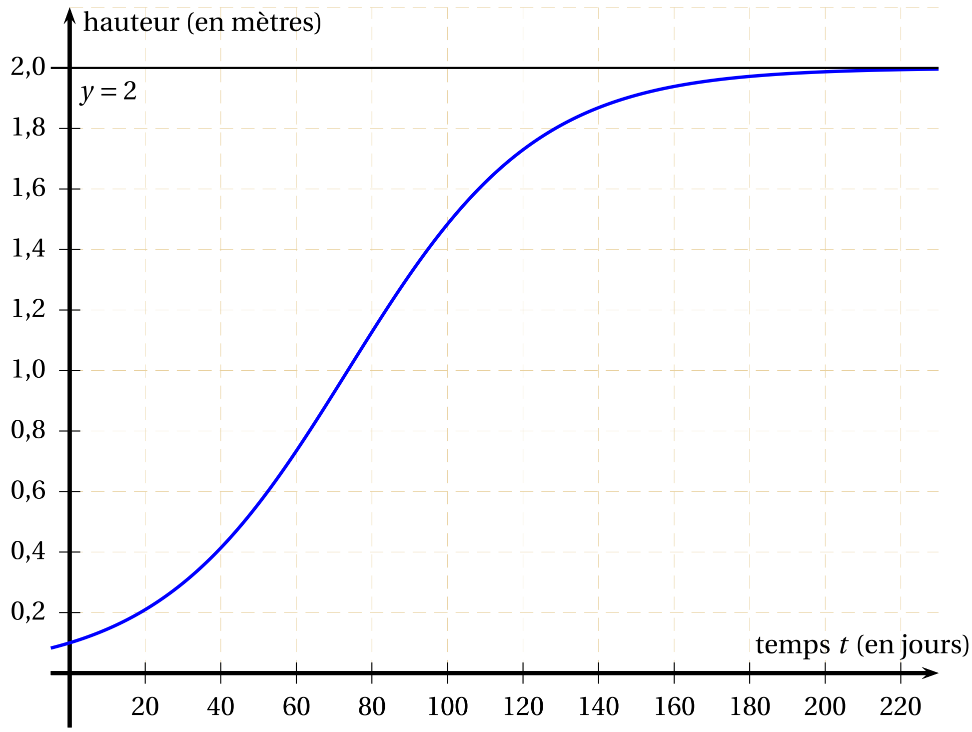
Déterminer les constantes a et b afin que la fonction h corresponde à la croissance du plant de maïs étudié.

Partie 2

On considère désormais que la croissance du plant de maïs est donnée par la fonction f définie sur $[0\,;250]$ par

$$f(t) = \frac{2}{1 + 19\mathrm{e}^{-0,04t}}$$

1. Déterminer $f'(t)$ en fonction de t (f' désignant la fonction dérivée de la fonction f). En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;250]$.
2. Calculer le temps nécessaire pour que le plant de maïs atteigne une hauteur supérieure à $1,5$ m.
3. (a) Vérifier que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;250]$ on a $f(t) = \dfrac{2\mathrm{e}^{0,04t}}{\mathrm{e}^{0,04t} + 19}$.
   Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;250]$ par
   $\mathrm{F}(t) = 50\ln\left(\mathrm{e}^{0,04t} + 19\right)$ est une primitive de la fonction f.
   (b) Déterminer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[50\,;100]$.
   En donner une valeur approchée à 10^{-2} près et interpréter ce résultat.
4. On s'intéresse à la vitesse de croissance du plant de maïs ; elle est donnée par la fonction dérivée de la fonction f.
   La vitesse de croissance est maximale pour une valeur de t.
   En utilisant le graphique donné en annexe, déterminer une valeur approchée de celle-ci. Estimer alors la hauteur du plant.



Exercice 2. **Liban 2013**

Étant donné un nombre réel k, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_k(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-kx}}.$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

Dans cette partie on choisit $k = 1$. On a donc, pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

La représentation graphique $\mathscr{C}_1$ de la fonction f_1 dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ est donnée en ANNEXE, à rendre avec la copie.

1. Déterminer les limites de $f_1(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.
2. Démontrer que, pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.
3. On appelle f_1' la fonction dérivée de f_1 sur $\mathbb{R}$. Calculer, pour tout réel x, $f_1'(x)$.
   En déduire les variations de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.
4. On définit le nombre $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x$.

   Montrer que $\mathrm{I} = \ln\left(\dfrac{1+\mathrm{e}}{2}\right)$. Donner une interprétation graphique de I.

Partie B

Dans cette partie, on choisit $k = -1$ et on souhaite tracer la courbe $\mathscr{C}_{-1}$ représentant la fonction f_{-1}.
Pour tout réel x, on appelle P le point de $\mathscr{C}_1$ d'abscisse x et M le point de $\mathscr{C}_{-1}$ d'abscisse x.
On note K le milieu du segment [MP].

1. Montrer que, pour tout réel x, $f_1(x) + f_{-1}(x) = 1$.

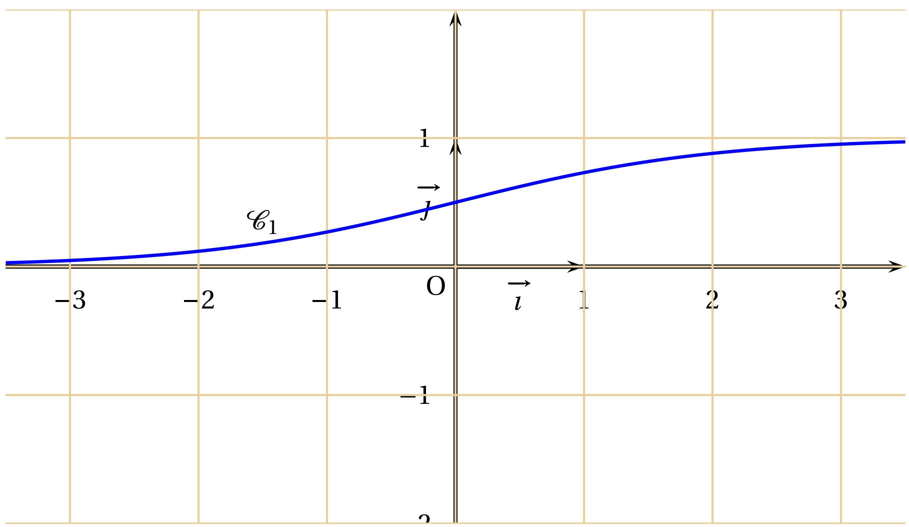
2. En déduire que le point K appartient à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$.
3. Tracer la courbe $\mathscr{C}_{-1}$ sur l'ANNEXE, à rendre avec la copie.
4. En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_{-1}$ l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

Partie C

Dans cette partie, on ne privilégie pas de valeur particulière du paramètre k.
Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Quelle que soit la valeur du nombre réel k, la représentation graphique de la fonction f_k est strictement comprise entre les droites d'équations $y = 0$ et $y = 1$.
2. Quelle que soit la valeur du réel k, la fonction f_k est strictement croissante.
3. Pour tout réel $k \geqslant 10$, $f_k\left(\frac{1}{2}\right) \geqslant 0,99$.

Représentation graphique $\mathscr{C}_1$ de la fonction f_1

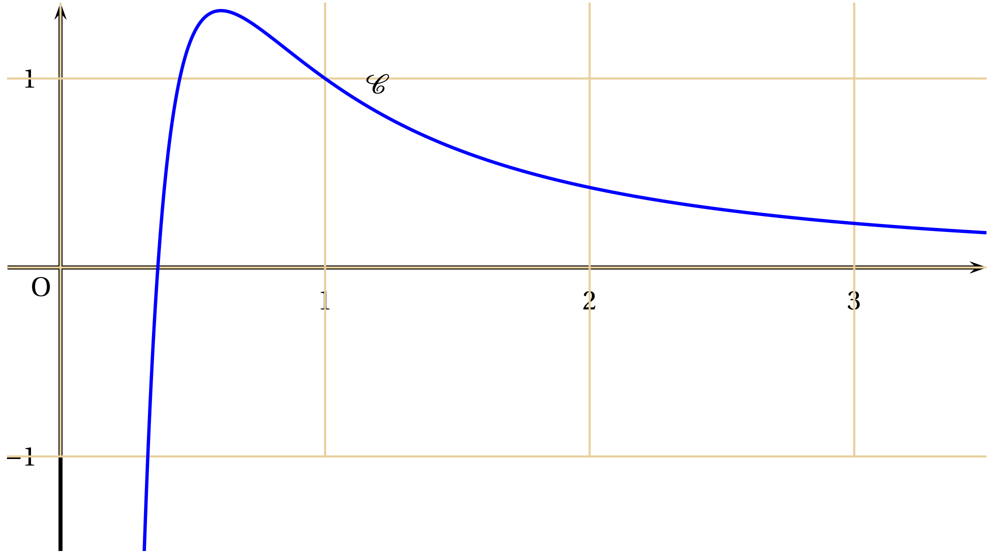


Exercice 3. **Amérique du nord 2013**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1+\ln(x)}{x^2}$$

et soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan. La courbe $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous :



1. (a) Étudier la limite de f en 0.

   (b) Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

   (c) En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathscr{C}$.

2. (a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{-1-2\ln(x)}{x^3}.$$

   (b) Résoudre sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ l'inéquation $-1-2\ln(x) > 0$.
   En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   (c) Dresser le tableau des variations de la fonction f.

3. (a) Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

   (b) En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

4. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note I_n l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations respectives $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $x = n$.

   (a) Démontrer que $0 \leqslant \mathrm{I}_2 \leqslant \mathrm{e} - \dfrac{1}{2}$.

   On admet que la fonction F, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $\mathrm{F}(x) = \dfrac{-2-\ln(x)}{x}$,est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   (b) Calculer I_n en fonction de n.

   (c) Étudier la limite de I_n en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

<u>Exercice</u> 4. (Polynésie 2013)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Étude de la fonction f.

(a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec les axes du repère.

(b) Étudier les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire les éventuelles asymptotes de la courbe $\mathscr{C}$.

(c) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

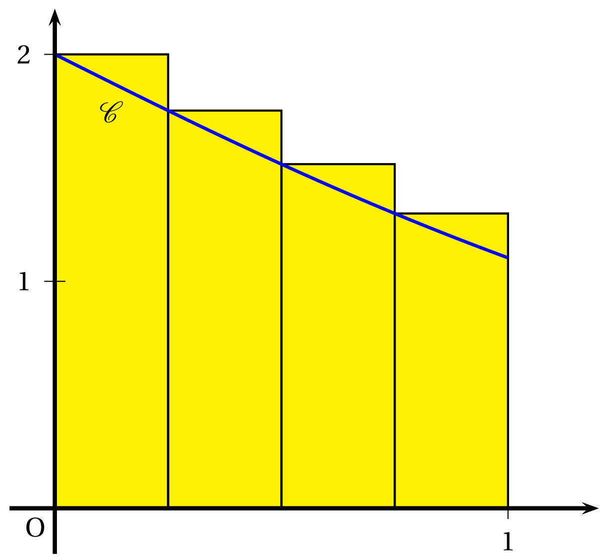
2. Calcul d'une valeur approchée de l'aire sous une courbe.

On note $\mathscr{D}$ le domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. On approche l'aire du domaine $\mathscr{D}$ en calculant une somme d'aires de rectangles.

(a) Dans cette question, on découpe l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ en quatre intervalles de même longueur :

- Sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{1}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f(0)$
- Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{2}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{1}{4}\right)$
- Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\ ;\ \frac{3}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{1}{2}\right)$
- Sur l'intervalle $\left[\frac{3}{4}\ ;\ 1\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{3}{4}\right)$

Cette construction est illustrée ci-dessous.



L'algorithme ci-dessous permet d'obtenir une valeur approchée de l'aire du domaine $\mathscr{D}$ en ajoutant les aires des quatre rectangles précédents :

Variables :	k est un nombre entier
	S est un nombre réel
Initialisation :	Affecter à S la valeur 0
Traitement :	Pour k variant de 0 à 3
	Affecter à S la valeur $S + \frac{1}{4} f\left(\frac{k}{4}\right)$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher S

Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du résultat affiché par cet algorithme.

(b) Dans cette question, N est un nombre entier strictement supérieur à 1. On découpe l'intervalle $[0\,;\,1]$ en N intervalles de même longueur. Sur chacun de ces intervalles, on construit un rectangle en procédant de la même manière qu'à la question 2.a.

Modifier l'algorithme précédent afin qu'il affiche en sortie la somme des aires des N rectangles ainsi construits.

3. Calcul de la valeur exacte de l'aire sous une courbe.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = (-x-3)\mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que g est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

(a) Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$, exprimée en unités d'aire.

(b) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de l'erreur commise en remplaçant $\mathscr{A}$ par la valeur approchée trouvée au moyen de l'algorithme de la question 2. a, c'est-à-dire l'écart entre ces deux valeurs.

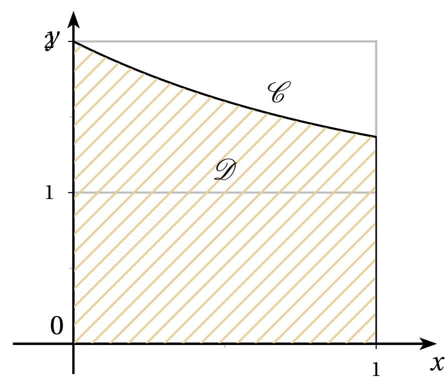
Exercice 5.
Centre étrangers 2013

On considère la fonction g définie pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$g(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$, $g(x) > 0$.

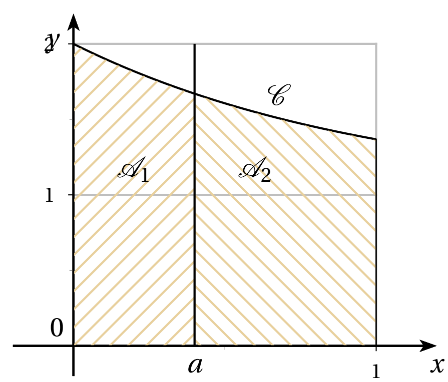
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal, et $\mathscr{D}$ le domaine plan compris d'une part entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$, d'autre part entre les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.
La courbe $\mathscr{C}$ et le domaine $\mathscr{D}$ sont représentés ci-contre.



Le but de cet exercice est de partager le domaine $\mathscr{D}$ en deux domaines de même aire, d'abord par une droite parallèle à l'axe des ordonnées (partie A), puis par une droite parallèle à l'axe des abscisses (partie B).

Partie A

Soit a un réel tel que $0 \leqslant a \leqslant 1$.
On note $\mathscr{A}_1$ l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe $(\mathrm{O}x)$,les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$, puis $\mathscr{A}_2$ celle du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, $(\mathrm{O}x)$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = 1$.
$\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont exprimées en unités d'aire.



1. (a) Démontrer que $\mathscr{A}_1 = a - \mathrm{e}^{-a} + 1$.

(b) Exprimer $\mathscr{A}_2$ en fonction de a.

2. Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$f(x) = 2x - 2\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

   (a) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$. On précisera les valeurs exactes de $f(0)$ et $f(1)$.

   (b) Démontrer que la fonction f s'annule une fois et une seule sur l'intervalle $[0\,;\,1]$. en un réel α. Donner la valeur de α arrondie au centième.

3. En utilisant les questions précédentes, déterminer une valeur approchée du réel a pour lequel les aires $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont égales.

Partie B

Soit b un réel positif.

Dans cette partie, on se propose de partager le domaine $\mathscr{D}$ en deux domaines de même aire par la droite d'équation $y = b$. On admet qu'il existe un unique réel b positif solution.

1. Justifier l'inégalité $b < 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}}$. On pourra utiliser un argument graphique.
2. Déterminer la valeur exacte du réel b.

Exercice 6. **Antilles-Guyanne 2013**

Dans tout ce qui suit, m désigne un nombre réel quelconque.

Partie A

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{x}.$$

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = (x+2)\mathrm{e}^{x}$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On définie la fonction g_m sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_m(x) = x + 1 - m\mathrm{e}^{-x}$$

et on note $\mathscr{C}_m$ la courbe de la fonction g_m dans un repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$du plan.

1. (a) Démontrer que $g_m(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = m$.

   (b) Déduire de la partie A, sans justification, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_m$ avec l'axe des abscisses en fonction du réel m.

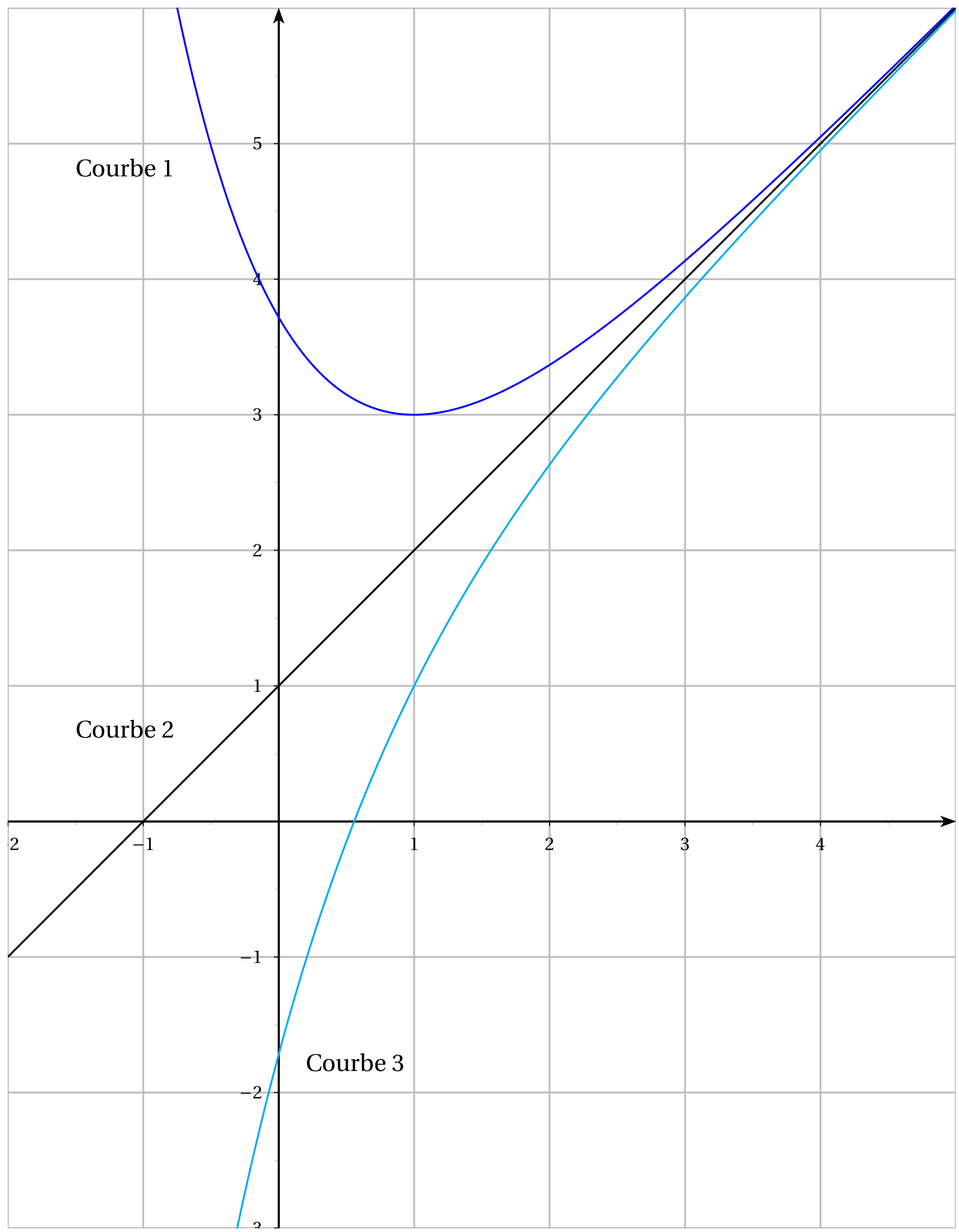
2. On a représenté en annexe 2 les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_{\mathrm{e}}$, et $\mathscr{C}_{-\mathrm{e}}$ (obtenues en prenant respectivement pour m les valeurs 0, e et $-$e).

   Identifier chacune de ces courbes sur la figure de l'annexe en justifiant.

3. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}_m$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation
   $y = x + 1$ suivant les valeurs du réel m.

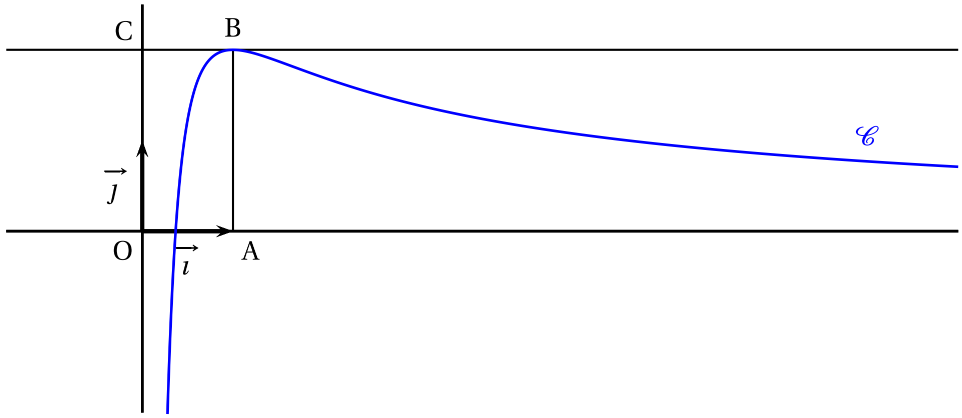
4. (a) On appelle D_2 la partie du plan comprise entre les courbes $\mathscr{C}_{\mathrm{e}}$, $\mathscr{C}_{-\mathrm{e}}$, l'axe $(\mathrm{O}y)$ et la droite $x = 2$. Hachurer D_2 sur l'annexe 2.

(b) Dans cette question, a désigne un réel positif, D_a la partie du plan comprise entre $\mathscr{C}_e$, $\mathscr{C}_{-e}$, l'axe (Oy) et la droite Δ_a d'équation $x = a$. On désigne par $\mathscr{A}(a)$ l'aire de cette partie du plan, exprimée en unités d'aire.
Démontrer que pour tout réel a positif : $\mathscr{A}(a) = 2e - 2e^{1-a}$.
En déduire la limite de $\mathscr{A}(a)$ quand a tend vers $+\infty$.



<u>Exercice</u> 7. **Métropole 2013**

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

- les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(1\,,0)$, $(1\,,2)$, $(0\,,2)$;
- la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathscr{C}$ en B ;
- il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x,

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x}.$$

1. (a) En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
   (b) Vérifier que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{(b-a) - b\ln x}{x^2}$.
   (c) En déduire les réels a et b.
2. (a) Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,,+\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.
   (b) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \dfrac{2}{x} + 2\,\dfrac{\ln x}{x}$.
   (c) En déduire le tableau de variations de la fonction f.
3. (a) Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0\,,1]$.
   (b) Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel β de l'intervalle $]1\,,+\infty]$ tel que $f(\beta) = 1$.
   Déterminer l'entier n tel que $n < \beta < n+1$.
4. On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables :	a, b et m sont des nombres réels.
Initialisation :	Affecter à a la valeur 0.
	Affecter à b la valeur 1.
Traitement :	Tant que $b - a > 0{,}1$
	Affecter à m la valeur $\dfrac{1}{2}(a+b)$.
	Si $f(m) < 1$ alors Affecter à a la valeur m.
	Sinon Affecter à b la valeur m.
	Fin de Si.
	Fin de Tant que.
Sortie :	Afficher a.
	Afficher b.

(a) Faire tourner cet algorithme en complétant le tableau ci-dessous que l'on recopiera sur la copie.

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0				
b	1				
$b-a$					
m					

(b) Que représentent les valeurs affichées par cet algorithme ?

(c) Modifier l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude 10^{-1}.

5. Le but de cette question est de démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ partage le rectangle OABC en deux domaines d'aires égales.

(a) Justifier que cela revient à démontrer que $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

(b) En remarquant que l'expression de $f(x)$ peut s'écrire $\dfrac{2}{x} + 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x$, terminer la démonstration.