∽ EXERCICES ∽
FONCTIONS EXPONENTIELLES ET RÉVISIONS

Exercice 1. Dans cet exercice on se propose de démontrer le théorème suivant :

Théorème 1.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}xe^x=0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=e^x-\frac{x^2}{2}$$

1. (a) Calculer $g'(x)$ pour $x\in\mathbb{R}$ puis en utilisant le fait (déjà démontré) que pour tout réel x on a $e^x>x$, dresser le tableau de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire que pour tout réel $x>0$ on a :
   $$e^x\geq\frac{x^2}{2}$$
   puis que
   $$\frac{e^x}{x}\geq\frac{x}{2}$$
   (c) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$
2. Soit x un réel strictement négatif. On pose $\mathrm{X}=-x$.
   (a) Montrer que $xe^x=-\frac{1}{\frac{e^{\mathrm{X}}}{\mathrm{X}}}$.
   (b) En déduire que $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$
3. (a) On rappelle la définition du nombre dérivée :
   Soit f une fonction dérivable en a alors
   $$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$
   Appliquer ce résultat pour la fonction exponentielle et pour $a=0$. En déduire le dernier résultat du théorème.

Exercice 2. Démontrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a :

$$\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

Exercice 3.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}$ puis $\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}$ et enfin $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{1}{x}}$. En déduire d'éventuelles asymptotes.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{2x}-3e^x$.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{2x}$ puis $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{2x}-e^{-x}$ puis $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3e^{-x}$.

Exercice 4. Résoudre les équations et inéquations suivantes, d'inconnues réelle x :

1. $e^{2x} - e^{x+1} = 0$;
2. $e^x + 2e^{-x} = 3$ [1] ;
3. $\dfrac{e^2}{e^x} \leq e^{3x-1}$;
4. $e^x(e^x - 1) > e^{2x+1}(e^x - 1)$ [2].

Exercice 5. Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x) = 45\left(1 - e^{-\frac{x}{4}}\right)$$

1. Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^+$ puis étudier son signe.
2. Déterminer la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$. Que peut-on en déduire graphiquement.
3. Dresser le tableau de variations de f sur $[0;+\infty[$.
4. Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 40$.
5. Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. Soit $\mathscr{C}_g$ la représentation graphique de la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = 7 + 3e^{\frac{x}{4}}$. Sur quel intervalle a-t-on $f(x) > g(x)$ i.e sur quel intervalle $\mathscr{C}_f$ est-elle au dessus de $\mathscr{C}_g$.

Exercice 6. **Nouvelle Calédonie 2013 - Complet**

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{x}.$$

1. **Étude d'une fonction auxiliaire**
   (a) Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par
   $$g(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1.$$
   Étudier le sens de variation de la fonction g.
   (b) Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0\,;\,+\infty[$ tel que $g(a) = 0$.
   Démontrer que a appartient à l'intervalle $[0{,}703\,;\,0{,}704[$.
   (c) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. **Étude de la fonction f**
   (a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
   (b) On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   Démontrer que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
   (c) En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   (d) Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel
   $m = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$.
   (e) Justifier que $3{,}43 < m < 3{,}45$.

---
1. On posera $X = e^x$.
2. On effectuera un tableau de signe

I. Annales 2013 - Fonctions exponentielles

Exercice 7. **Liban 2013 - Extrait**

Étant donné un nombre réel k, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_k(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-kx}}.$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O};\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.
On note représentation graphique $\mathscr{C}_k$ de la fonction f_k dans le repère $(\mathrm{O};\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$

PARTIE A.

Dans cette partie on choisit $k = 1$. On a donc, pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

1. Déterminer les limites de $f_1(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.
2. Démontrer que, pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.
3. On appelle f_1' la fonction dérivée de f_1 sur $\mathbb{R}$. Calculer, pour tout réel x, $f_1'(x)$.
   En déduire les variations de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

PARTIE B.

Dans cette partie, on choisit $k = -1$ et on souhaite tracer la courbe $\mathscr{C}_{-1}$ représentant la fonction f_{-1}.
Pour tout réel x, on appelle P le point de $\mathscr{C}_1$ d'abscisse x et M le point de $\mathscr{C}_{-1}$ d'abscisse x.
On note K le milieu du segment [MP].

1. Montrer que, pour tout réel x, $f_1(x) + f_{-1}(x) = 1$.
2. En déduire que le point K appartient à la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.
3. Que peut-on en déduire sur les courbes $\mathscr{C}_{-1}$ et $\mathscr{C}_1$.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f_{-1}.

PARTIE C.

Dans cette partie, on ne privilégie pas de valeur particulière du paramètre k.
Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Quelle que soit la valeur du nombre réel k, la représentation graphique de la fonction f_k est strictement comprise entre les droites d'équations $y = 0$ et $y = 1$.
2. Quelle que soit la valeur du réel k, la fonction f_k est strictement croissante.
3. Pour tout réel $k \geqslant 10$, $f_k\left(\dfrac{1}{2}\right) \geqslant 0,99$.

Exercice 8. **Polynésie 2013- Extrait**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Étude de la fonction f.
   (a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec les axes du repère.

(b) Étudier les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire les éventuelles asymptotes de la courbe $\mathscr{C}$.

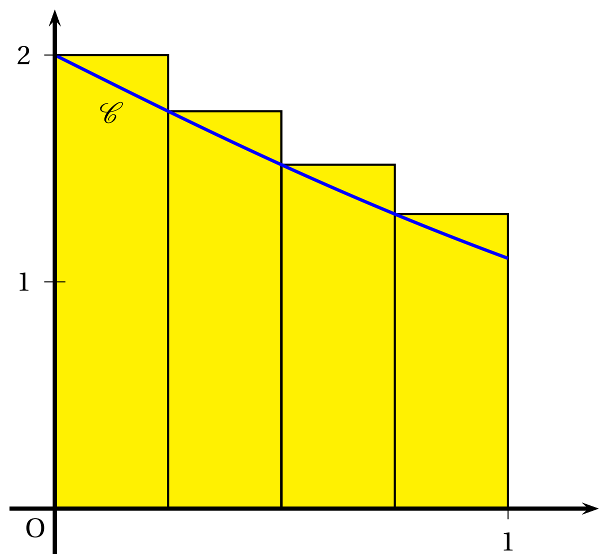
(c) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

2. Calcul d'une valeur approchée de l'aire sous une courbe.
On note $\mathscr{D}$ le domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. On approche l'aire du domaine $\mathscr{D}$ en calculant une somme d'aires de rectangles.

(a) Dans cette question, on découpe l'intervalle $[0\,;\,1]$ en quatre intervalles de même longueur :

- Sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{1}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f(0)$
- Sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{4}\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\dfrac{1}{4}\right)$
- Sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{3}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$
- Sur l'intervalle $\left[\dfrac{3}{4}\,;\,1\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\dfrac{3}{4}\right)$

Cette construction est illustrée ci-dessous.



L'algorithme ci-dessous permet d'obtenir une valeur approchée de l'aire du domaine $\mathscr{D}$ en ajoutant les aires des quatre rectangles précédents :

Variables :	k est un nombre entier
	S est un nombre réel
Initialisation :	Affecter à S la valeur 0
Traitement :	Pour k variant de 0 à 3
	Affecter à S la valeur $\text{S} + \dfrac{1}{4} f\left(\dfrac{k}{4}\right)$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher S

Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du résultat affiché par cet algorithme.

(b) Dans cette question, N est un nombre entier strictement supérieur à 1. On découpe l'intervalle $[0\,;\,1]$ en N intervalles de même longueur. Sur chacun de ces intervalles, on construit un rectangle en procédant de la même manière qu'à la question 2.a.

Modifier l'algorithme précédent afin qu'il affiche en sortie la somme des aires des N rectangles ainsi construits.

Exercice 9. **Antilles Guyanne 2013 - Extrait.**

Dans tout ce qui suit, m désigne un nombre réel quelconque.

Partie A

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{x}.$$

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = (x+2)\mathrm{e}^{x}$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

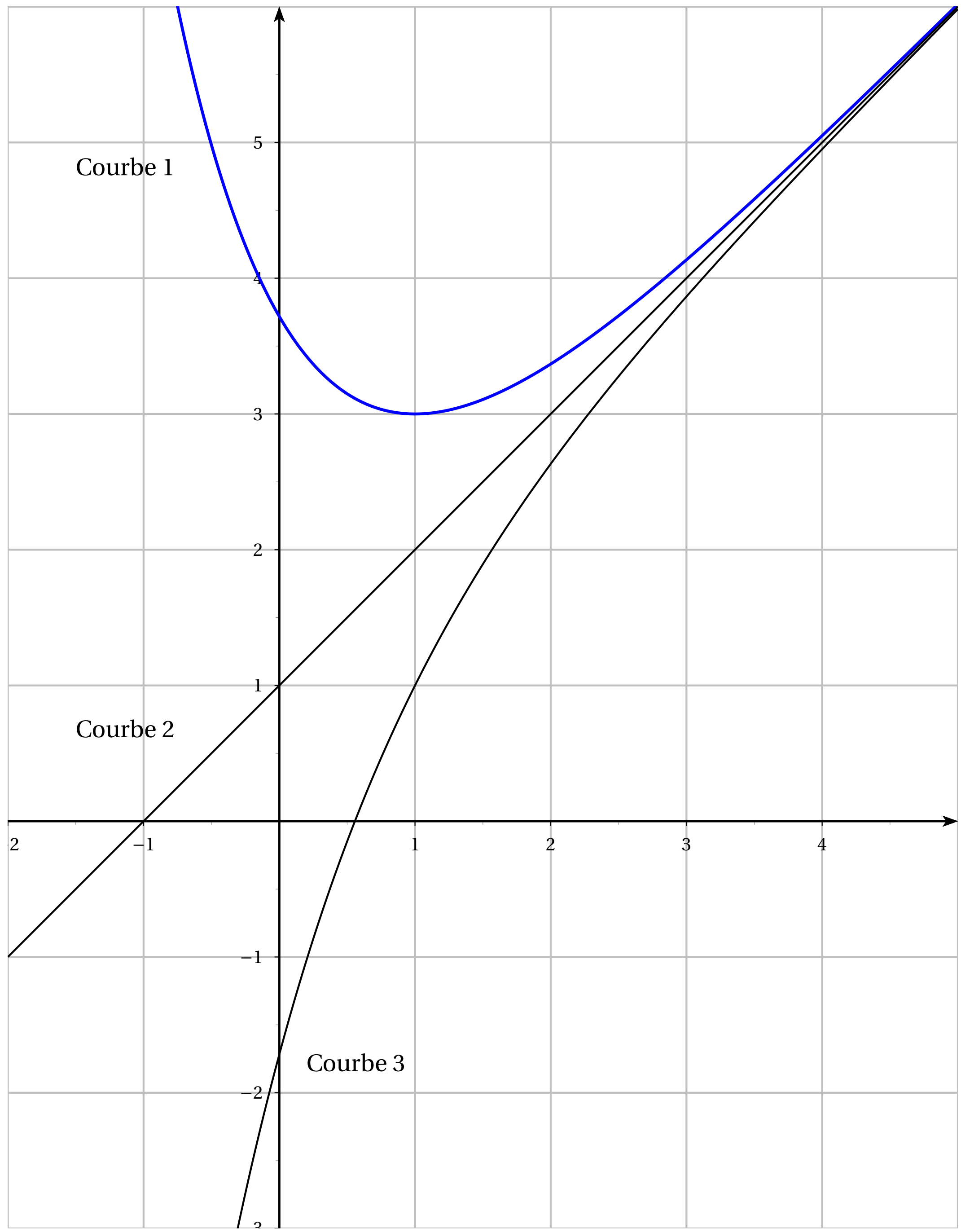
Partie B

On définie la fonction g_m sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_m(x) = x + 1 - m\mathrm{e}^{-x}$$

et on note $\mathscr{C}_m$ la courbe de la fonction g_m dans un repère $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$du plan.

1. (a) Démontrer que $g_m(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = m$.
   (b) Déduire de la partie A, sans justification, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_m$ avec l'axe des abscisses en fonction du réel m.
2. On a représenté en annexe 2 les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_\mathrm{e}$, et $\mathscr{C}_{-\mathrm{e}}$ (obtenues en prenant respectivement pour m les valeurs 0, e et $-$e).
   Identifier chacune de ces courbes sur la figure de l'annexe en justifiant.
3. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}_m$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x + 1$ suivant les valeurs du réel m.
4.



Exercice 10. **Asie 2013 - Complet**

On considère les fonctions f et g définies pour tout réel x par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x \quad \text{et} \quad g(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}.$$

Les courbes représentatives de ces fonctions dans un repère orthogonal du plan, notées respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, sont fournies en annexe.

Partie A

Ces courbes semblent admettre deux tangentes communes. Tracer aux mieux ces tangentes sur la figure de l'annexe.

Partie B

Dans cette partie, on admet l'existence de ces tangentes communes.

On note $\mathscr{D}$ l'une d'entre elles. Cette droite est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a et tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point B d'abscisse b.

1. (a) Exprimer en fonction de a le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.
   (b) Exprimer en fonction de b le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point B.
   (c) En déduire que $b = -a$.
2. Démontrer que le réel a est solution de l'équation

$$2(x-1)\mathrm{e}^{x}+1=0.$$

Partie C

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x)=2(x-1)\mathrm{e}^{x}+1.$$

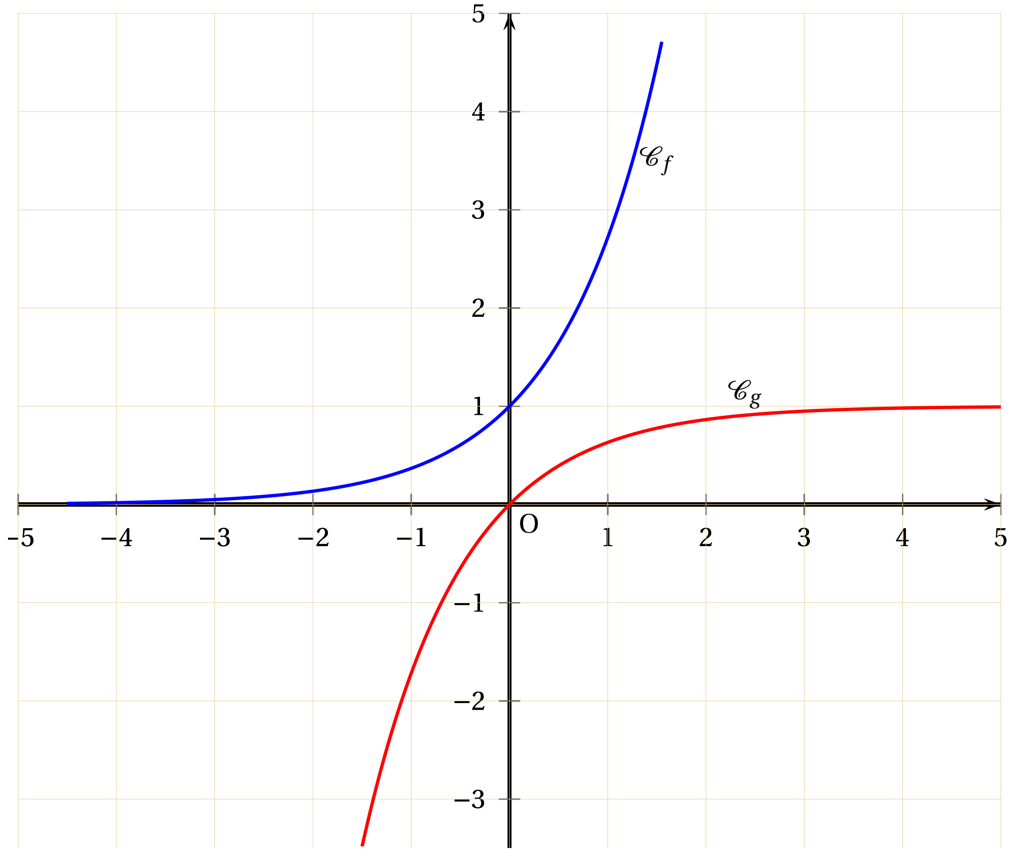
1. (a) Calculer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et $+\infty$.
   (b) Calculer la dérivée de la fonction φ, puis étudier son signe.
   (c) Dresser le tableau de variation de la fonction φ sur $\mathbb{R}$. Préciser la valeur de $\varphi(0)$.
2. (a) Démontrer que l'équation $\varphi(x)=0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.
   (b) On note α la solution négative de l'équation $\varphi(x)=0$ et β la solution positive de cette équation.
   À l'aide d'une calculatrice, donner les valeurs de α et β arrondies au centième.

Partie D

Dans cette partie, on démontre l'existence de ces tangentes communes, que l'on a admise dans la partie B.

On note E le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse α et F le point de la courbe $\mathscr{C}_g$ d'abscisse $-\alpha$ (α est le nombre réel défini dans la partie C).

1. Démontrer que la droite (EF) est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point E.
2. Démontrer que (EF) est tangente à $\mathscr{C}_g$ au point F.



Exercice 11. **Antilles - Guyanne 2013 - Extrait**

Pour tout réel k strictement positif, on désigne par f_k la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :

$$f_k(x) = kx\mathrm{e}^{-kx}.$$

On note $\mathscr{C}_k$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O};\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie A : Étude du cas $k = 1$

On considère donc la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_1(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire que la courbe $\mathscr{C}_1$ admet une asymptote que l'on précisera.
2. Étudier les variations de f_1 sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que la fonction g_1 définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

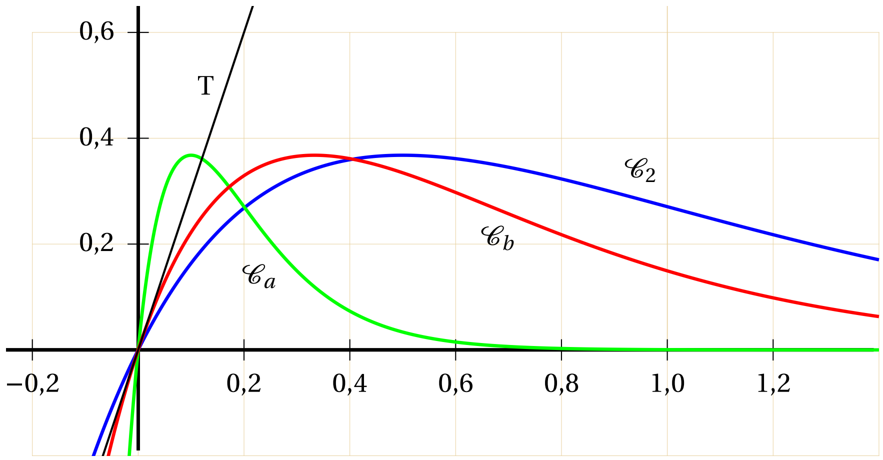
$$g_1(x) = -(x+1)\mathrm{e}^{-x}$$

   est une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.
   Remarque : Une primitive d'une fonction f sur l'intervalle $\mathbb{R}$ est une fonction g telle que $g'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4. Étudier le signe de $f_1(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.

Partie B : Propriétés graphiques

On a représenté sur le graphique ci-dessous les courbes $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_a$ et $\mathscr{C}_b$ où a et b sont des réels strictement positifs fixés et T la tangente à $\mathscr{C}_b$ au point O origine du repère.



1. Montrer que pour tout réel k strictement positif, les courbes $\mathscr{C}_k$ passent par un même point.
2. (a) Montrer que pour tout réel k strictement positif et tout réel x on a

$$f_k'(x) = k(1 - kx)\mathrm{e}^{-kx}.$$

   (b) Justifier que, pour tout réel k strictement positif, f_k admet un maximum et calculer ce maximum.
   (c) En observant le graphique ci-dessus, comparer a et 2. Expliquer la démarche.
   (d) Écrire une équation de la tangente à $\mathscr{C}_k$ au point O origine du repère.
   (e) En déduire à l'aide du graphique une valeur approchée de b.

II. Révisions

Exercice 12. **Asie 2013 - Extrait - Proba**

Dans cet exercice, les probabilités seront arrondies au centième.

Partie A

Un grossiste achète des boîtes de thé vert chez deux fournisseurs. Il achète 80 % de ses boîtes chez le fournisseur A et 20 % chez le fournisseur B.

10 % des boîtes provenant du fournisseur A présentent des traces de pesticides et 20 % de celles provenant du fournisseur B présentent aussi des traces de pesticides.

On prélève au hasard une boîte du stock du grossiste et on considère les évènements suivants :

- évènement A : « la boîte provient du fournisseur A » ;
- évènement B : « la boîte provient du fournisseur B » ;
- évènement S : « la boîte présente des traces de pesticides ».

1. Traduire l'énoncé sous forme d'un arbre pondéré.
2. (a) Quelle est la probabilité de l'évènement $B \cap \overline{S}$?
   (b) Justifier que la probabilité que la boîte prélevée ne présente aucune trace de pesticides est égale à $0,88$.
3. On constate que la boîte prélevée présente des traces de pesticides.
   Quelle est la probabilité que cette boîte provienne du fournisseur B ?

Partie B

Le gérant d'un salon de thé achète 10 boîtes chez le grossiste précédent. On suppose que le stock de ce dernier est suffisamment important pour modéliser cette situation par un tirage aléatoire de 10 boîtes avec remise.
On considère la variable aléatoire X qui associe à ce prélèvement de 10 boîtes, le nombre de boîtes sans trace de pesticides.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que les 10 boîtes soient sans trace de pesticides.
3. Calculer la probabilité qu'au moins 8 boîtes ne présentent aucune trace de pesticides.

Exercice 13. **Amérique du nord 2012**

Pour financer une sortie, les membres de cette association organisent une loterie.

1. Chaque semaine, un membre de l'association est choisi au hasard de manière indépendante pour tenir la loterie.
   (a) Déterminer la probabilité pour qu'en quatre semaines consécutives, il y ait exactement deux fois un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.
   (b) Pour tout entier naturel n non nul, on note p_n la probabilité pour qu'en n semaines consécutives, il y ait au moins un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.
   Montrer que pour tout entier n non nul, $p_n = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n$.
   (c) Déterminer le nombre minimal de semaines pour que $p_n \geqslant 0,99$.
2. Pour cette loterie, on utilise une urne contenant 100 jetons ; 10 jetons exactement sont gagnants et rapportent 20 euros chacun, les autres ne rapportent rien.
   Pour jouer à cette loterie, un joueur doit payer 5 € puis tire au hasard et de façon simultanée deux jetons de l'urne : il reçoit alors 20 euros par jeton gagnant. Les deux jetons sont ensuite remis dans l'urne.
   On note X la variable aléatoire associant le gain algébrique (déduction faite des 5 €) réalisé par un joueur lors d'une partie de cette loterie.

(a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

(b) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X et interpréter le résultat obtenu.

Exercice 14. **Métropole sept. 2012**

L'objet de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_0 = 3 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{7}{u_n}\right) \quad (\star)$$

On pourra utiliser sans démonstration le fait que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

1. On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{7}{x}\right).$$

   Démontrer que la fonction f admet un minimum.
   En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant \sqrt{7}$.

2. (a) Soit n un entier naturel quelconque.
   Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

   (b) Pourquoi peut-on en déduire que la suite (u_n) est convergente ?

   (c) On déduit de la relation $(\star)$ que la limite ℓ de cette suite est telle que $\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{7}{\ell}\right)$.
   Déterminer ℓ.

3. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - \sqrt{7} = \frac{1}{2}\frac{\left(u_n - \sqrt{7}\right)^2}{u_n}$.

4. On définit la suite (d_n) par :

$$d_0 = 1 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n^2.$$

   (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$u_n - \sqrt{7} \leqslant d_n.$$

   (b) Voici un algorithme :

Variables :	n et p sont des entiers naturels
	d est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de p.
Initialisations :	Affecter à d la valeur 1.
	Affecter à n la valeur 0
Traitement :	Tant que $d > 10^{-p}$.
	Affecter à d la valeur $0{,}5d^2$
	Affecter à n la valeur $n+1$.
Sortie :	Afficher n.

   En entrant la valeur 9, l'algorithme affiche le nombre 5.
   Quelle inégalité peut-on en déduire pour d_5 ?
   Justifier que u_5 est une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-9} près.