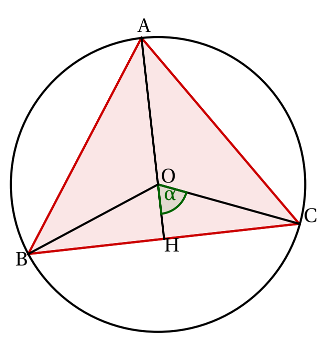
Exercices
Etude de fonctions

Exercice 1. Un triangle ABC isocèle, de sommet principal A, est inscrit dans un cercle de centre O et de rayon 1. H est le pied de la hauteur issue de A. On note α la mesure en radian de l'angle $\widehat{HOC}$. On suppose enfin que $0 \leq \alpha \leq \pi/2$.

1. (a) Exprimez BC et AH en fonction de α.
   (b) En déduire, en fonction de α, l'aire du triangle ABC.
2. On considère la fonction f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par
$$f(\alpha) = \sin\alpha(1+\cos\alpha)$$
   Calculez la dérivée f' de f et prouvez que, pour tout réel α de $[0, \pi/2]$, on a $f'(\alpha) = 2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1$
3. (a) Factorisez le polynôme $2X^2 + X - 1$ et en déduire une factorisation de $f'(\alpha)$
   (b) Dressez alors le tableau de variations de f.
4. Démontrez qu'il existe une valeur de α, que vous déterminerez, pour laquelle l'aire du triangle ABC est maximale. Précisez ce maximum. Quelle est alors la nature du triangle ABC ?
5. On considère la fonction g définie sur $[-2\pi; 2\pi]$ par :
$$g(x) = f(x) = \sin x(1+\cos x)$$
   (a) Etudiez la parité de la fonction g.
   (b) Déduire des questions précédentes le tableau de variation de la fonction g sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
   (c) Montrez que g est périodique de période 2π.
   (d) Etudiez les variations de la fonction g sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.
   (e) En déduire le tableau de variation de g sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$.



Exercice 2.

1. Soit f la fonction définie par
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{24x+1}}$$
   (a) Déterminez l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de la fonction f.
   (b) Montrez que pour tout $x \in \mathscr{D}$ (où $\mathscr{D}$ est le domaine de dérivabilité) on a :
$$f'(x) = \frac{-12}{(24x+1)\sqrt{24x+1}}$$
   (c) Étudiez le sens de variation de f sur $\mathscr{D}_f$.
   (d) Montrez que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution sur $[0;1]$.
   (e) Résolvez cette équation.
2. L'état d'équilibre de la réaction de dissociation de N_2O_4 peut être caractérisé par la valeur du coefficient de dissociation α. À la température de 27 degré, ce coefficient est lié à la pression totale P par la relation :
$$\alpha^2 = \frac{1}{24P+1}$$
   Dans cette question, on identifie x à la pression totale P. $x \in [0;1]$ dans ce cas et on identifie $f(x)$ à α.
   (a) On considère que la dissociation de N_2O_4 est pratiquement totale si $\alpha = 0,99$. Déterminez la valeur de la pression correspondante.
   (b) De manière plus générale, exprimez P en fonction de α. Pourquoi définit-on ainsi une fonction ? Pouvait-on le prévoir ?
   (c) Dressez le tableau de variation de la fonction définie à la question précédente.

Exercice 3. Albert est un fervent adepte de la plongée sous-marine. Alors qu'il se trouve en A et s'émerveille devant la beauté du paysage aquatique, il aperçoit au loin un requin d'une taille qui le dissuade de poursuivre plus avant son exploration des fonds marins et décide de rejoindre son bateau situé en B. À quel endroit doit-il rejoindre la surface pour que le temps de parcours soit minimal ?