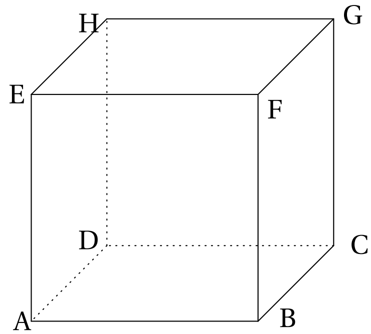
I. Exercices de base

On donne le cube ABCDEFGH d'arête a où les sommets sont ordonnés comme dans la figure suivante (pour les exercices 1 et 2) :



Exercice 1. Calculer, dans chaque cas, $\vec{u}\cdot\vec{v}$ en fonction de l'arête a :

1. $\vec{u}=\overrightarrow{EB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AD}$.
2. $\vec{u}=\overrightarrow{EA}$, $\vec{v}=\overrightarrow{CH}$.
3. $\vec{u}=\overrightarrow{HF}$, $\vec{v}=\overrightarrow{DG}$.
4. $\vec{u}=\overrightarrow{EG}$, $\vec{v}=\overrightarrow{CH}$.

Exercice 2. On désigne par I, J et K les milieux de [BF], [FG] et [GH].

1. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{EJ}\cdot\overrightarrow{FI}$, $\overrightarrow{EK}\cdot\overrightarrow{FI}$, $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{BC}$.
2. Evaluer $\cos\widehat{IEK}$ après avoir calculé EI, EK et $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{EK}$.

Exercice 3. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Etablir l'équivalence :

$$\left|\vec{u}\cdot\vec{v}\right| = ||\vec{u}||\times||\vec{v}|| \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires.}$$

Exercice 4. On considère les points $A(3;4;-2)$, $B(1;6;0)$ et $C(-2;2;1)$.
Montrer que le triangle ABC est rectangle.

Exercice 5. Donner une équation cartésienne du plan passant par A et admettant $\vec{n}$ comme vecteur normal, dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

1. $A(3;-1;2)$ et $\vec{n}(1;0;-4)$
2. $A(1;-1;0)$ et $\vec{n}(1;1;-2)$
3. $A(-2;1;2)$ et $\vec{n}=\vec{i}+\vec{j}$
4. $A(3;4;5)$ et $\vec{n}\left(\frac{1}{3};\frac{1}{4};\frac{1}{5}\right)$

Exercice 6. Verifier que chaque équation proposée est l'équation cartésienne d'un plan et trouver un point de ce plan et un vecteur normal :

1. $3x-5y+z-1=0$
2. $x=y$
3. $3z-x-3=0$
4. $y=-2x+1$

Exercice 7. Dans chaque cas, donner une équation cartésienne du plan P (déterminer d'abord un point de ce plan et un vecteur normal) :

1. P est le plan médiateur du segment [AB] avec $A(-1;3;1)$ et $B(0;5;-3)$.
2. P est le plan orthogonal à la droite (AC) passant par l'orthocentre du triangle ABC avec $A(3;0;4)$, $B(-1;1;1)$ et $C(2;0;0)$.