Exercice 1. Un exercice où la matrice de transition à une somme égale à 1 sur les lignes...

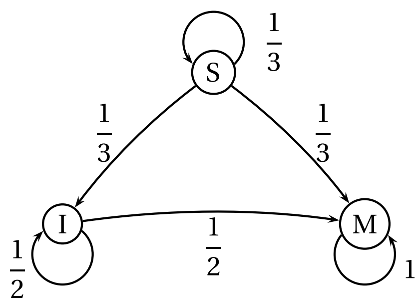
PARTIE A.

Les scientifiques estiment qu'un seul individu est à l'origine de la maladie sur les 100 personnes que compte la population et que, d'une semaine à la suivante, un individu change d'état suivant le processus suivant :

– parmi les individus sains, la proportion de ceux qui deviennent porteurs sains est égale à $\frac{1}{3}$ et la proportion de ceux qui deviennent malades est égale à $\frac{1}{3}$,

– parmi les individus porteurs sains, la proportion de ceux qui deviennent malades est égale à $\frac{1}{2}$.

La situation peut être représentée par un graphe probabiliste comme ci-dessous.



On note $P_n = (s_n \quad i_n \quad m_n)$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste au bout de n semaines où s_n, i_n et $m_n$désignent respectivement la probabilité que l'individu soit sain, porteur sain ou malade la n-ième semaine.
On a alors $P_0 = (0,99 \quad 0 \quad 0,01)$

1. Exprimer s_{n+1}, i_{n+1} et m_{n+1} en fonction de s_n, i_n et m_n.
2. Écrire la matrice A appelée *matrice de transition*, telle que pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = P_n \times A$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $P_n = P_0 \times A^n$.
4. Déterminer l'état probabiliste P_4 au bout de quatre semaines. On pourra arrondir les valeurs à 10^{-2}.
   Quelle est la probabilité qu'un individu soit sain au bout de quatre semaines ?

PARTIE B.

La maladie n'évolue en réalité pas selon le modèle précédent puisqu'au bout de 4 semaines de recherche, les scientifiques découvrent un vaccin qui permet d'enrayer l'endémie et traitent immédiatement l'ensemble de la population.
L'évolution hebdomadaire de la maladie après vaccination est donnée par la matrice de transition :

$$B = \begin{pmatrix} 5/12 & 1/4 & 1/3 \\ 5/12 & 1/4 & 1/3 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

On note Q_n la matrice ligne donnant l'état probabiliste au bout de n semaines après la mise en place de ces nouvelles mesures de vaccination. Ainsi, $Q_n = (S_n \quad I_n \quad M_n)$ où S_n, I_n et M_n désignent respectivement la probabilité que l'individu soit sain, porteur sain et malade la n-ième semaine après la vaccination.
Pour tout entier naturel n, on a alors $Q_{n+1} = Q_n \times B$.
D'après la partie A, $Q_0 = P_4$. Pour la suite, on prend $Q_0 = (0,01 \quad 0,10 \quad 0,89)$ où les coefficients ont été arrondis à 10^{-2}.

1. Exprimer S_{n+1}, I_{n+1} et M_{n+1} en fonction de S_n, I_n et M_n.
2. Déterminer la constante réelle k telle que $B^2 = kJ$ où J est la matrice carrée d'ordre 3 dont tous les coefficients sont égaux à 1.

3. Montrer que $\mathrm{B}^3 = \mathrm{B}^2$ puis en déduire par récurrence que $\mathrm{B}^n = \mathrm{B}^2$ pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2.
4. (a) Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $\mathrm{Q}_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.
   (b) Interpréter ce résultat en terme d'évolution de la maladie.
   Peut-on espérer éradiquer la maladie grâce au vaccin ?

Exercice 2. Le gestionnaire d'un site web, composé de trois pages web numérotées de 1 à 3 et reliées entre elles par des liens hypertextes, désire prévoir la fréquence de connexion sur chacune de ses pages web.
Des études statistiques lui ont permis de s'apercevoir que :

- Si un internaute est sur la page 1, alors il ira, soit sur la page 2 avec la probabilité $\frac{1}{4}$, soit sur la page 3 avec la probabilité $\frac{3}{4}$.
- Si un internaute est sur la page 2, alors, soit il ira sur la page 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ soit il restera sur la page 2 avec la probabilité $\frac{1}{4}$, soit il ira sur la page 3 avec la probabilité $\frac{1}{4}$.
- Si un internaute est sur la page 3, alors, soit il ira sur la page 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$, soit il ira sur la page 2 avec la probabilité $\frac{1}{4}$,soit il restera sur la page 3 avec la probabilité $\frac{1}{4}$.

Pour tout entier naturel n, on définit les évènements et les probabilités suivants :
A_n : « Après la n-ième navigation, l'internaute est sur la page 1 » et on note $a_n = \mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$.
B_n : « Après la n-ième navigation, l'internaute est sur la page 2 » et on note $b_n = \mathrm{P}(\mathrm{B}_n)$.
C_n : « Après la n-ième navigation, l'internaute est sur la page 3 » et on note $c_n = \mathrm{P}(\mathrm{C}_n)$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n$.
   On admet que, de même, $b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n$ et $c_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n$.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $\mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. $\mathrm{U}_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$ représente la situation initiale, avec $a_0 + b_0 + c_0 = 1$.
   Montrer que, pour tout entier naturel n, $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{MU}_n$ où M est une matrice 3×3 que l'on précisera.
   En déduire que, pour tout entier naturel $n, \mathrm{U}_n = \mathrm{M}^n\mathrm{U}_0$.
3. Montrer qu'il existe une seule matrice colonne $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ telle que : $x + y + z = 1$ et $\mathrm{MU} = \mathrm{U}$.
4. Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir l'expression de M^n, n étant un entier naturel non nul :

$$\mathrm{M}^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n \times 2}{3} & \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} & \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} + \frac{\left(-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) \times 2}{3} & \frac{5}{12} + \frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} & \frac{5}{12} + \frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} \end{pmatrix}$$

   Pour tout entier naturel n non nul, exprimer a_n, b_n et c_n en fonction de n. En déduire que les suites (a_n), (b_n) et (c_n) convergent vers des limites que l'on précisera.
5. Interpréter les résultats obtenus et donner une estimation des pourcentages de fréquentation du site à long terme.

Exercice 3. Un logiciel permet de transformer un élément rectangulaire d'une photographie. Ainsi, le rectangle initial OEFG est transformé en un rectangle $OE'F'G'$, appelé image de OEFG.

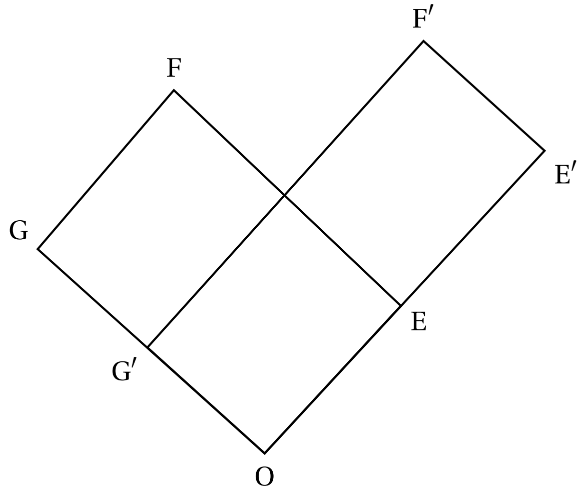


Figure 1

L'objet de cet exercice est d'étudier le rectangle obtenu après plusieurs transformations successives.

PARTIE A.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Les points E, F et G ont pour coordonnées respectives $(2\,;2)$, $(-1\ ;\ 5)$ et $(-3\ ;\ 3)$.

La transformation du logiciel associe à tout point $M(x\ ;\ y)$ du plan le point $M'(x'\ ;\ y')$, image du point M tel que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & \frac{5}{4}x+\frac{3}{4}y \\ y' & = & \frac{3}{4}x+\frac{5}{4}y \end{array}\right.$$

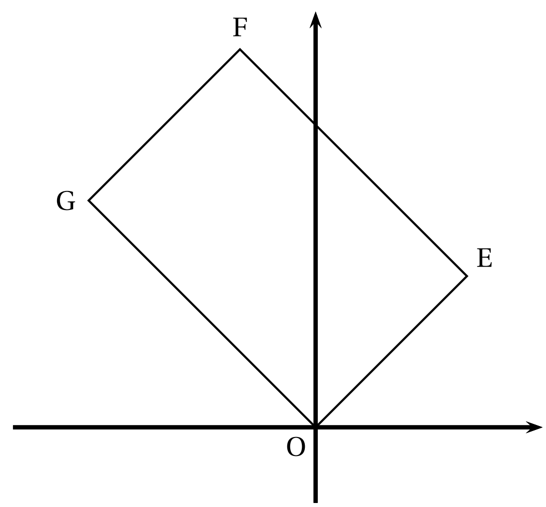


Figure 2

1. (a) Calculer les coordonnées des points E′, F′ et G′, images des points E, F et G par cette transformation.

   (b) Comparer les longueurs OE et OE′ d'une part, OG et OG′ d'autre part.

   Donner la matrice carrée d'ordre 2, notée A, telle que : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

PARTIE B.

Dans cette partie, on étudie les coordonnées des images successives du sommet F du rectangle OEFG lorsqu'on applique plusieurs fois la transformation du logiciel.

1. On considère l'algorithme suivant destiné à afficher les coordonnées de ces images successives.
   Une erreur a été commise. Modifier cet algorithme pour qu'il permette d'afficher ces coordonnées.

Entrée	Saisir un entier naturel non nul N
Initialisation	Affecter à x la valeur -1 Affecter à y la valeur 5
Traitement	POUR i allant de 1 à N Affecter à a la valeur $\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}y$ Affecter à b la valeur $\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}y$ Affecter à x la valeur a Affecter à y la valeur b FIN POUR
Sortie	Afficher x, afficher y

2. On a obtenu le tableau suivant :

i	1	2	3	4	5	10	15
x	2,5	7,25	15,625	31,8125	63,9063	2047,9971	65535,9999
y	5,5	8,75	16,375	32,1875	64,0938	2048,0029	65536,0001

Conjecturer le comportement de la suite des images successives du point F.

PARTIE C.

Dans cette partie, on étudie les coordonnées des images successives du sommet E du rectangle OEFG. On définit la suite des points $E_n(x_n\ ;\ y_n)$ du plan par $E_0 = E$ et la relation de récurrence :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix},$$

où $(x_{n+1}\ ;\ y_{n+1})$ désignent les coordonnées du point E_{n+1}. Ainsi $x_0 = 2$ et $y_0 = 2$.

1. On admet que, pour tout entier $n \geqslant 1$, la matrice A^n peut s'écrire sous la forme : $A^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}$. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $\alpha_n = 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}}$ et $\beta_n = 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}$.
2. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, le point E_n est situé sur la droite d'équation $y = x$.

   On rappelle que, pour tout entier naturel n, les coordonnées $(x_n\ ;\ y_n)$ du point E_n vérifient : $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   (b) Démontrer que la longueur OE_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.