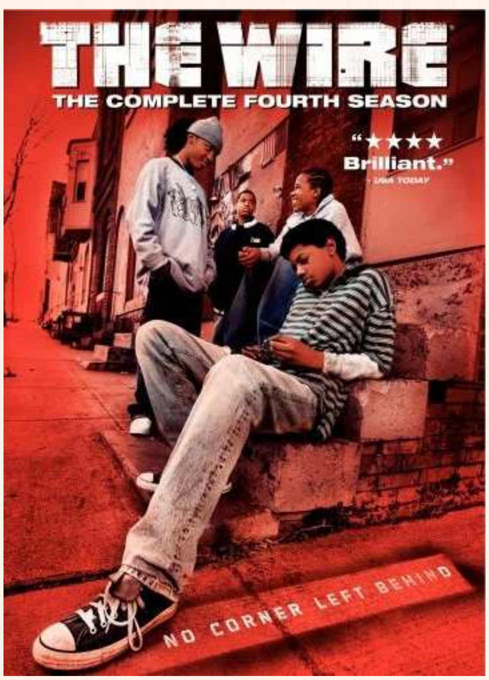
Chapitre 1

Divers raisonnements mathématiques

Hors Sujet



Titre : « The Wire »
Auteur : David Simon
Présentation succinte de l'auteur : Sur écoute (The Wire) est une série télévisée américaine, créée par David Simon et Ed Burns.

Elle a pour sujet la criminalité dans la ville de Baltimore, à travers la vision de ceux qui la vivent au quotidien : policiers, trafiquants en tous genres, politiques, enseignants, journalistes, résidents de Baltimore, etc.

Avec un aspect de quasi-documentaire par son réalisme et son non-manichéisme, la série est acclamée par la critique, bien qu'elle n'ait pas connu un succès commercial important. Elle est souvent considérée comme la meilleure série télévisée jamais diffusée à la télévision, et l'une des fictions les plus abouties dans les années 2000, notamment pour sa représentation réaliste quasi littéraire de la vie urbaine, et son exploration profonde des thèmes socio-politiques de l'Amérique.

Le tour de force de la série est de s'engager, sur le plan social, en montrant sans détour les pans les plus sombres du décor américain, son revers le plus inavouable, tout en mettant en scène une multitude de points de vue réalistes qui multiplient les questions dérangeantes sans jamais proposer de solution miracle. Il n'y a pas de fausse objectivité rassurante et pas de subjectivité accusatrice sous-jacente, l'épisode ne fait que montrer le plus passivement possible, il en résulte un étrange bourdonnement qui persiste longtemps après sa diffusion.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : D. Zancanaro
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jean Durand (Castelnaudary)

Table des matières

I. Des symboles à connaître 1
I.1. Implication $\Longrightarrow$, réciproque $\Longleftarrow$ et équivalence $\Longleftrightarrow$ . . . 1
I.2. Les quantificateurs pour tout $\forall$ et il existe $\exists$ . . . 2

II. Des raisonnements déjà connus 3
II.1. Le contre-exemple . . . 3
II.2. La disjonction de cas . . . 4
II.3. L'absurde et la contraposé . . . 5

III. Un nouveau raisonnement : La récurrence 8
III.1. Exemple introductif . . . 8
III.2. Principe du raisonnement par récurrence et exemples . . . 9
III.3. Démonstration mathématique du principe de raisonnement par récurrence *(Hors Programme)* . 10
III.4. Des exercices d'entrainement . . . 11
III.5. Exercices corrigés . . . 13

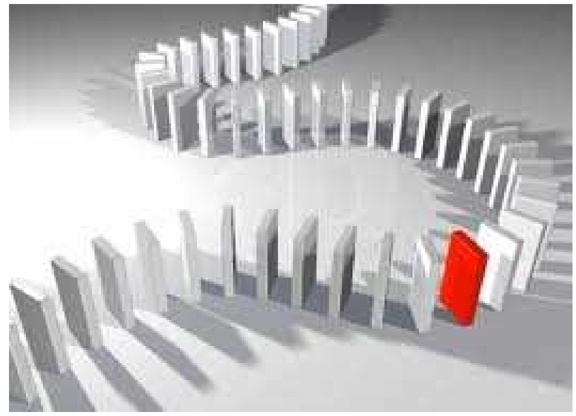
L'essentiel :

- $\rightsquigarrow$ Maîtriser les symboles mathématiques de la démonstration
- $\rightsquigarrow$ Avoir conscience de différents types de raisonnements logiques
- $\rightsquigarrow$ Traduire et comprendre les quantificateurs
- $\rightsquigarrow$ Comprendre le principe du raisonnement par récurrence
- $\rightsquigarrow$ Rédiger une démonstration par récurrence

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

Leçon 1

Divers raisonnements mathématiques



Introduction

L'objectif de ce chapitre est de faire le point sur divers types de raisonnements logiques utilisés en mathématiques, permettant d'établir des démonstrations.
Lorsque l'on cherche à démontrer qu'une proposition est toujours vraie ou au contraire fausse, on peut commencer par regarder des cas particuliers. Cependant, ceci ne prouve pas qu'une proposition est vraie tout le temps. Il s'avère donc nécessaire de mettre en place des raisonnements logiques pour arriver à une conclusion valide. Il en existe plusieurs types, dont les principaux sont exposés ici.
A votre niveau, on ne vous demandera pas de savoir faire des démonstrations de cours, mais on peut vous demander de savoir les reproduire. Pour cela, la meilleure manière est de les comprendre, notamment dans leur démarche, et donc dans le type de raisonnement invoqué. De plus, vous constaterez que ces raisonnements sont valables pour résoudre des problèmes et des exercices de votre niveau. Vous avez déjà rencontré la plupart d'entre eux, mais vous allez également découvrir ici le raisonnement par récurrence, fondamental en classe de Terminale Scientifique.

I. Des symboles à connaître

I.1. Implication $\Longrightarrow$, réciproque $\Longleftarrow$ et équivalence $\Longleftrightarrow$

Définition 1.

Le symbole $\Longrightarrow$ signifie « **implique** ». On peut également traduire une propriété contenant ce symbole sous la forme « Si . . .Alors ».
L'**implication** est le principe même du raisonnement mathématique : dans une propriété, une hypothèse entraîne une conclusion.
On dit que l'hypothèse est une de **condition suffisante** pour conclure, et que la conclusion est une **condition nécessaire** pour avoir l'hypothèse.

Exemples :

Considérons les propositions vraies suivantes :

- Si je m'appelle Ana, alors je suis une fille.
  S'appeler Ana est une condition suffisante pour conclure que je suis une fille.
- Si un quadrilatère est un rectangle, alors c'est un parallélogramme. *Qu'un quadrilatère soit un rectangle est une condition suffisante pour conclure qu'il s'agit d'un parallélogramme.*
- $x \geq 10 \Longrightarrow 3x \geq 15$.

Définition 2.

La **réciproque** d'une propriété consiste à retourner la phrase en échangeant l'hypothèse et la conclusion, ou encore à changer le sens de la flèche.
Une propriété et sa réciproque sont indépendantes et se démontrent séparément.
En effet le fait qu'une propriété soit vraie n'implique pas que sa réciproque le soit !

Exemples :

Considérons les réciproques des propositions de l'exemple précédent.

- Si je suis une fille, alors je m'appelle Ana : FAUX
  Pour m'appeler Ana, il n'est pas suffisant d'être une fille.
- Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors c'est un rectangle : FAUX
  Pour qu'un quadrilatère soit un rectangle, il n'est pas suffisant qu'il soit un parallélogramme.
- $x \geq 10 \Longleftarrow 3x \geq 15$: FAUX

Définition 3.

Lorsqu'une propriété et sa réciproque sont vraies, on utilise le symbole $\Longleftrightarrow$, qui signifie « **équivaut à** ». On peut également traduire ce symbole par « **Si et seulement si** ».
On parle d'**équivalence** entre l'hypothèse et la conclusion.

Exemples :

- ABC est un triangle rectangle en A si et seulement si $\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2$
- $x \geq 5 \Longleftrightarrow 3x \geq 15$

I.2. Les quantificateurs pour tout $\forall$ et il existe $\exists$

Définition 4.

Les **quantificateurs**. Ils précisent le domaine de validité d'une propriété.
Au lycée, vous devez connaître les symboles $\forall$ et $\exists$, qui signifient respectivement « **Pour tout** »et « **Il existe un** », sous entendu « (au moins) ». La virgule qui suivra le symbole $\exists$ sera alors traduite par « tel que ».
Il est donc essentiel de bien les comprendre pour savoir dans quels cas une propriété peut s'appliquer.

Exemples :

- $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$
- $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 100$

Attention !

Lorsqu'on énonce des propositions toujours vraies en français, on sous-entend souvent les quantificateurs.

Exemples :

- Noël est en décembre (sous entendu « **Tous** les ans »)
- Un parallélogramme dont les diagonales sont de même longueur est un rectangle (sous-entendu « **Tous** les parallélogrammes »)
- Un parallélogramme peut avoir des diagonales de même longueur (sous-entendu « **il existe** (au moins) un tel parallélogramme »)

Attention !

Les deux quantificateurs « **tout** »et « **il existe** »sont liés lorsqu'il s'agit d'énoncer le contraire d'une proposition. En effet, le contraire de « tout »n'est pas « aucun », mais « il existe (au moins) un ».

Exemples :

Le contraire de « **Tous** les ans, Noël est en décembre »est la proposition « **Il existe une** année (au moins) ou Noël n'est pas en décembre ».
Le contraire de « **Tous** les rectangle sont des parallélogrammes »est la proposition « **Il existe un** rectangle (au moins) qui n'est pas un parallélogramme ».
Evidemment une proposition et son contraire ne peuvent pas être toutes les deux vraies.
Pour énoncer le contraire de ces propositions, on a dit qu'il existait au moins un cas où l'hypothèse émise était vérifiée, mais pas la conclusion.

Exercice 1. On définit sur $\mathbb{N}^*$ la suite (u_n) de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}$.
On considère la proposition suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \forall n \geq \mathrm{N} \text{ on a } u_n < \varepsilon$$

1. Traduire cette phrase mathématique en français.
2. On choisit $\varepsilon = 1$.
   (a) Trouver un rang p telle que $u_p < \varepsilon$.
   (b) Montrer que pour tout $n \geq p$ on a $u_n < \varepsilon$
   (c) Conclure par rapport à la proposition donnée dans ce cas particulier.
3. Même question pour $\varepsilon = 0.1$, 0.01 et 10^{-6}.
4. Peut-on conclure que la proposition est vraie ?
5. Démontrer cette proposition dans le cas général (ie pour ε quelconque).

II. Des raisonnements déjà connus

II.1. Le contre-exemple

Travail de l'élève :

1. Démontrer que les propositions suivantes sont fausses :
   (a) « Aujourd'hui tout est fabriqué en Chine »
   (b) « Un quadrilatère dont les diagonales sont de même longueur est un rectangle »
2. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on considère la proposition $\mathscr{P}(n)$: « L'entier $n^2 - n + 11$ est premier »ie qu'il admet exactement deux diviseurs (1 et lui-même).
   (a) La proposition $\mathscr{P}(1)$ est-elle vraie ?

(b) Faire un tableau de valeurs à la calculatrice de l'expression $n^2 - n + 11$ pour n allant de 1 à 10. Que dire de $\mathscr{P}(2)$? $\mathscr{P}(3)$? $\mathscr{P}(4)$? $\mathscr{P}(10)$?

(c) La proposition $\mathscr{P}(n)$ est-elle vraie pour tout entier naturel n ?

Définition 5.

Le **contre-exemple** s'utilise pour montrer qu'il existe au moins un cas où une proposition n'est pas vraie, donc qu'elle est fausse.

Exemple :

Montrer par un contre-exemple que la proposition $\mathscr{P}(n)$: « L'entier $n^2 - n + 41$ est premier »n'est pas vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

***Solutions* :**

Si on choisit $n = 41$, alors $n^2 - n + 41 = 41^2 - 41 + 41 = 41^2$ qui admet pour diviseurs 1, 41 et 41^2. Ce n'est donc pas un nombre premier.

On peut vérifier que pour tout $0 \leq n < 41$ on a $n^2 - n + 41$ qui est premier. Mais ce n'est pas parce qu'une proposition est vraie sur les 41 premiers entiers naturels qu'elle l'est pour tous ...

II.2. La disjonction de cas

Définition 6.

On parle de raisonnement par **disjonction de cas** pour démontrer qu'une proposition est vraie, lorsque la démonstration effectuée dépend de la situation, mais que l'on traite tous les cas possibles séparément.

Au préalable, on commence par un tri, pour restreindre le nombre de cas à étudier.

Exemples :

- Aux échecs, le joueur qui a gagné annonce « Echec et Mat »avant que son adversaire joue, car il a envisagé tous les déplacements adverses possibles et qu'aucun ne l'empêche de gagner.
- Montrer par disjonction de cas que pour tout entier naturel n, le produit $n(n+1)$ est divisible par 2.

***Solutions* :**

Considérons les seuls deux cas possibles : n est soit pair, soit impair.

- Si n est pair, alors il existe un entier k tel que $n = 2k$ et donc $n(n+1) = 2k \times (2k+1)$ ce qui est un divisible par 2.
- Si n est impair, alors il existe un entier k tel que $n = 2k+1$ et donc $n(n+1) = (2k+1)(2k+1+1) = (2k+1)(2k+2) = 2(2k+1)(k+1)$ ce qui est divisible par 2.

Donc dans tous les cas, $n(n+1)$ est divisible par 2. La proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II.3. L'absurde et la contraposé

Définition 7.

Le raisonnement par l'**absurde** est une forme de raisonnement logique, consistant à démontrer la vérité d'une proposition en prouvant l'absurdité du contraire.
En effet, une proposition est forcément vraie ou fausse, mais jamais les deux à la fois.

Exemple :

1. Montrer par l'absurde que $\forall n \in \mathbb{N}$, n^2 impair $\Longrightarrow n$ impair.
2. Montrer que la réciproque de cette proposition est vraie aussi $\forall n \in \mathbb{N}$.
3. Traduire ces deux propriétés en une seule.

Solutions **:**

1. Raisonnons par l'absurde : Supposons que la proposition n'est pas vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, ie qu'il existe (au moins) un cas où n^2 est impair et n pair et plaçons-nous dans ce cas.
   Comme n est pair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$ et par conséquent on a $n^2 = 4k^2$. Donc n^2 est pair, ce qui est absurde. Ce cas ne peut pas exister : la proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. La réciproque à montrer est « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, n impair $\Longrightarrow n^2$ impair ».
   Supposons que n est un entier quelconque impair. Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$.
   Par conséquent, $n^2 = 4k^2 + 2k + 1 = 2(2k+1) + 1$ qui est un nombre impair.
   Donc la proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, n^2 impair $\iff n$ impair.

En pratique : mécanisme du raisonnement par l'absurde

Pour montrer qu'une proposition A entraîne une proposition B :

- $\rightsquigarrow$ On suppose A vraie et la négation de B
- $\rightsquigarrow$ On montre que cela entraîne contradiction (avec l'hypothèse de A en général)
- $\rightsquigarrow$ On en déduit que l'on a forcément $A \Longrightarrow B$

Définition 8.

Soit $\mathscr{P}$ la proposition suivante :

« *Si A est vraie alors B est vraie* » notée $A \Longrightarrow B$

La **contraposée** de $\mathscr{P}$ est la proposition :

« *Si B n'est pas vraie alors A n'est pas vraie* » notée (Non B) $\Longrightarrow$ (Non A) .

Propriété 1. (Définition)

Si une propositon $\mathscr{P}$ est vraie, alors sa contraposée aussi (et réciproquement).

$\mathscr{P}$	équivaut à	Contraposée de $\mathscr{P}$
$A \Longrightarrow B$	si et seulement si	$(\text{ Non } B) \Longrightarrow (\text{ Non } A)$

On dit que la conclusion B est une **condition nécessaire** à l'hypothèse A.
Dans le cas où $A \Longleftrightarrow B$, on dit que A est une **condition nécessaire et suffisante** à B (et réciproquement).

Preuve

Notons $\mathscr{P}'$ la contraposée de $\mathscr{P}$. On veut démontrer l'équivalence $\mathscr{P} \Longleftrightarrow \mathscr{P}'$, donc l'implication et sa réciproque.

$\boxed{\mathscr{P} \overset{?}{\Longrightarrow} \mathscr{P}'}$ Raisonnons par l'absurde :
Supposons $\mathscr{P}$ vraie, mais $\mathscr{P}'$ fausse, à savoir que (Non B) $\not\Rightarrow$ (Non A), ou encore qu'il existe au moins un cas où B est faux, mais A est vrai. Plaçons nous dans ce cas.
Comme A est vrai, d'après $\mathscr{P}$ on a aussi B vrai, ce qui est absurde puisque l'on a supposé B faux. Donc A est forcément faux.
Ainsi, si une proposition est vraie, alors sa contraposée est vraie aussi.

$\boxed{\mathscr{P} \overset{?}{\Longleftarrow} \mathscr{P}'}$ D'après ce qui précède, en supposant $\mathscr{P}'$ vraie, on sait que sa contraposée l'est aussi.
Or la contraposée de $\mathscr{P}'$ est $(\text{ Non } (\text{ Non } A)) \Longrightarrow (\text{ Non } (\text{ Non } B))$, ie $A \Longrightarrow B$ ou encore $\mathscr{P}$.
Donc $\mathscr{P}' \Longrightarrow \mathscr{P}$. CQFD

Exemples :

- Si je m'appelle Ana, alors je suis une fille.
  Contraposée (vraie) : Si je ne suis pas une fille, alors je ne m'appelle pas Ana.
  Il est nécessaire d'être une fille pour s'appeler Ana (mais cela n'est pas suffisant).
- Si un quadrilatère est un rectangle, alors c'est un parallélogramme.
  Contraposée (vraie) : Si un quadrilatère n'est pas un parallélogramme, alors ce n'est pas un rectangle.
  Il est nécessaire mais pas suffisant qu'un quadrilatère soit un parallélogramme pour être un rectangle
- $x \geq 10 \Longrightarrow 3x \geq 15$.
  Contraposée (vraie) : $3x < 15 \Longrightarrow x < 10$
- Si ABC est un triangle rectangle en A, alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$
  Contraposée (vraie) : Si $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$ alors ABC n'est pas un triangle rectangle en A.

Remarque : Une proposition ou sa contraposée sont donc équivalentes. Dans un cours, on pourrait donc écrire l'une ou l'autre sans perte d'information.
En général, le choix de formulation ne se fait pas en fonction de celle que l'on démontre le plus facilement, mais en fonction de celle que l'on emploie le plus aisément, ou tout simplement celle qu'on a l'habitude de rencontrer dans les divers ouvrages : il ne faut pas oublier ce que l'on a reçu en héritage, provenant de divers horizons, et il est tout à fait normal de continuer à formuler certaines propriétés comme elles l'ont toujours été, tout en sachant que dès que l'on en aura besoin, on pourra passer de l'une à l'autre sans problème.

Exemple :

Enoncer alors les contraposées (vraies) des propriétés établies dans l'exemple précédent.

Solutions :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, n pair $\Longrightarrow n^2$ pair.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, n^2 pair $\Longrightarrow n$ pair.
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \Longleftrightarrow n^2$ pair.

Exercice 2. *On rappelle que $\forall n \in \mathbb{N}$, n pair $\Longleftrightarrow$ n^2 pair.*
Montrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel, c'est-à-dire qu'il ne s'écrit pas sous la forme d'un quotient d'entiers $\dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$.

III. Un nouveau raisonnement : La récurrence

III.1. Exemple introductif

Considérons la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$$

Cette suite est définie par récurrence (chaque terme se calcule à partir du précédent).
<u>But</u> : On souhaiterait obtenir une formule explicite de u_n en fonction de n. La suite n'est ni géométrique, ni arithmétique, et la formule ne semble pas évidente, par conséquent on va calculer les premiers termes pour se faire une idée.

$$\begin{aligned} u_0 &= 1 \\ u_1 &= 2 \times 1 + 1 = 3 \\ u_2 &= 2 \times 3 + 1 = 7 \\ u_3 &= 2 \times 7 + 1 = 15 \\ u_4 &= 2 \times 15 + 1 = 31 \\ u_5 &= 2 \times 31 + 1 = 63 \end{aligned}$$

Bien, en observant les premiers termes de cette suite il semble logique que $u_6 = 127$, en effet en ajoutant 1 à chaque terme on obtient les puissances successive de 2. Autrement dit il **semble** que

$$u_n = 2^n - 1 \forall n \in \mathbb{N}$$

Attention, une conjecture n'est pas une preuve (ni une affirmation forcément vraie, certaines conjectures se révèlent parfois fausses...). Ce n'est que l'énoncé d'une propriété résultant d'un certain nombre d'observations.
Alors comment confirmer, par une démonstration, la propriété conjecturée ci-dessus ?
Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété définie pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\mathscr{P}(n) : u_n = 2^n - 1$$

Supposons un instant, que pour un certain entier n, on ait effectivement la propriété $\mathscr{P}(n) : u_n = 2^n - 1$
Dans ce cas on aurait : $u_{n+1} = 2 \times u_n + 1 = 2 \times (2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$
Autrement dit si $\mathscr{P}(n)$ est vraie alors $\mathscr{P}(n+1)$ aussi.
On dit que la propriété $\mathscr{P}$ est **héréditaire**.
Au final on a vu que la propriété $\mathscr{P}$ était vraie au rang $n = 0$, 1, 2, 3, 4, 5 et 6 (on dit que la propriété est **initialisée**). Mais comme la propriété $\mathscr{P}$ est héréditaire elle sera vraie au rang 7, puis au rang 8, puis au rang 9, ... Si bien que notre propriété est finalement vraie à tout rang. Nous venons de faire un **raisonnement par récurrence** :

III.2. Principe du raisonnement par récurrence et exemples

Principe du raisonnement par récurrence

Soit $\mathscr{P}$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$ (ou sur une partie de $\mathbb{N}$)
Si :

- La propriété est initialisée à un certain rang n_0 (i.e si $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie)
- La propriété est héréditaire à partir du rang n_0 (i.e si pour $n \geq n_0$ $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$)

Alors :
La propriété est vraie à tout rang plus grand que n_0.

Exemple :

Compléter la démonstration par récurrence suivante, afin de montrer que la somme des n premiers entiers non nuls vaut $\dfrac{n(n+1)}{2}$.
Pour tout $n \geq \ldots$, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition «

- **Initialisation :** pour $n =$
  La somme des n premiers entiers non nuls vaut
  Et $\dfrac{n(n+1)}{2} =$

  Donc $\mathscr{P}(\ldots)$ est vraie.

- **Hérédité :** On suppose qu'il existe un entier $k \geq \ldots$ tel que $\mathscr{P}(k)$ est vraie, ie tel que l'on a

  On cherche à montrer $\mathscr{P}(k+1)$: «

  Or $1+2+3+\cdots+\cdots+(k+1) =$

  $=$

  $=$

  Donc $\mathscr{P}(\ldots\ldots)$ est vraie. La proposition est

- **Conclusion** La proposition est .... et ....
  Elle est donc vraie pour tout $n \geq$

Exemple :

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$.
Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq u_n \leq 3$.

Solutions :

Pour tout $n \geq 0$, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $0 \leq u_n \leq 3$ »

- **Initialisation** : pour $n = 0$
  $u_0 = 0$ et on a bien $0 \leq 0 \leq 3$
  Donc $0 \leq u_0 \leq 3$ et $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- **Hérédité** : On suppose qu'il existe un entier $k \geq 0$ tel que $\mathscr{P}(k)$ est vraie, ie tel que l'on a $0 \leq u_k \leq 3$
  On cherche à montrer $\mathscr{P}(k+1)$: « $0 \leq u_{k+1} \leq 3$ »ou encore $0 \leq \sqrt{u_k + 6} \leq 3$

  $$\begin{array}{llll} \text{Or } 0 \leq u_k \leq 3 & \iff & 6 \leq u_k + 6 \leq 9 & \\ & \iff & \sqrt{6} \leq \sqrt{u_k+6} \leq \sqrt{9} & \text{car la fonction racine carré conserve l'ordre sur les positifs} \\ & \iff & 0 \leq u_{k+1} \leq 3 & \end{array}$$

  Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie. La proposition est héréditaire.

- **Conclusion** La proposition est vraie au rang 0 et héréditaire à partir de 0.
  Elle est donc vraie pour tout $n \geq$

III.3. Démonstration mathématique du principe de raisonnement par récurrence *(Hors Programme)*

Théorème 1 :

Soit $\mathscr{P}$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$. Si :

- $\mathscr{P}(0)$ est vraie (Initialisation)
- $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $\mathscr{P}(n)$ vraie $\Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$ vraie (Hérédité)

Alors $\mathscr{P}(n)$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$

Preuve

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ soit fausse et considérons l'ensemble suivant :

$$\mathrm{E} = \{n \in \mathbb{N} \text{ tels que } \mathscr{P}(n) \text{ soit fausse }\}$$

E est donc un ensemble non vide et minorée par 0, par conséquent il admet un plus petit élément $m \geq 0$; on a donc $\mathscr{P}(m)$ fausse et$\mathscr{P}(n)$ vraie $\forall n$tel que$0 \leq n \leq m$. Dans ce cas :

- Si $m = 0$, alors on a $\mathscr{P}(0)$ fausse ce qui contredit la première hypothèse du théorème.
- Si $m > 0$, alors on a $\mathscr{P}(m-1)$ vraie et $\mathscr{P}(m)$ fausse, ce qui contredit la deuxième hypothèse du théorème.

Donc E est vide, autrement dit $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Remarque : La démonstration est analogue pour une propriété définie sur un intervalle du type $[\![n_0, +\infty[$

III.4. Des exercices d'entrainement

Exercice 3. On donne ci-dessous trois propositions vraies.

1. Pour tout entier $n \geq 5$, $2^n > n^2$
2. Pour tout réel $x > 0$, $(x+1)^3 \geq 1+3x$
3. Pour tout entier $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3 = 2n^4 - n^2$

Pour lesquelles peut-on envisager une démonstration par récurrence (que l'on ne fera pas) ?

Exercice 4. La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n, par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 3 - 2^n$

Exercice 5. On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme u_0 et pour tout n par la relation $u_{n+1} = 3u_n + 1$. Démontrer chacune des propositions suivantes.

1. La proposition « $u_n \leq u_{n+1}$ »est héréditaire.
2. La proposition « $u_n \geq u_{n+1}$ »est héréditaire.
3. Si $u_0 = 1$ la suite u est croissante.
4. Si $u_0 = -2$, la suite u est décroissante.
5. Su $u_0 = -0.5$, la suite u est stationnaire.

Exercice 6.

1. Montrer que les deux propositions suivantes sont héréditaires
   (A) : « $10^n - 1$ est un multiple de 9 » (B) : « $10^n + 1$ est un multiple de 9 »
2. Sont-elles vraies pour tout entier naturel n ?

Exercice 7. On s'intéresse désormais à la somme S_n des cubes des n premiers entiers naturels impairs.

1. Calculer S_1, S_2 et S_3.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a
$$S_n = 2n^4 - n^2$$
3. Quel est l'entier n pour lequel $S_n = 41328$?

Exercice 8. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7.

Exercice 9. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 3 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n}$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$2 \leq u_n \leq 3$$

Exercice 10. Montrer que $4^n - 1$ est un multiple de 3 pour tout entier naturel n.

Exercice 11. Démontrer que pour tout entier $n \geq 0$, l'**inégalité de Bernoulli** est vraie :

$$\forall x > 0 \text{ , on a } (1+x)^n \geq 1 + nx$$

<u>Exercice</u> 12.

1. Rappeler ce que signifie l'écriture $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ pour n et k entiers tels que $0 \leq k \leq n$.
2. Compléter la propriété suivante, vu en première :

   Pour tous n et k entiers tels que $0 \leq k \leq n$, on a $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} =$
3. Ecrire les 5 premières lignes du triangle de Pascal.
4. Démontrer que pour tous réels a et b on a

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

5. Quel lien observe-t-on entre les coefficients de développement et le triangle de Pascal ?
6. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$ on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^{n-k} b^k$$

   formule appelée **formule du binôme de Newton**.
7. *Application* : développer $(a+b)^5$ sans calcul.

III.5. Exercices corrigés

Exercice 13. Démontrer que

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Solutions :

On considère la propriété $\mathscr{P}$, définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\mathscr{P}(n) : \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a $0 = 0$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Supposons que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie i.e que $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour un certain rang n et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6}$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6}{6}$$

Or, $(n+2)(2n+3) = 2n^2+3n+4n+6 = 2n^2+7n+6$, par conséquent :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

la propriété est donc héréditaire, et donc on a montré par récurrence que

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Exercice 14. Considérons la suite (u_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = 2^n$$

Solutions :

Notons $\mathscr{P}(n) : u_n = 2^n$

- **Initialisation** : $u_0 = 2^0 = 1$, par conséquent $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Supposons que $\mathscr{P}(i)$ soit vraie $\forall i \leq n$, montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie i.e montrons que $u_{n+1} = 2^{n+1}$
  On a : $u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1} = 5 \times 2^n - 6 \times 2^{n-1} = 10 \times 2^{n-1} - 6 \times 2^{n-1} = 4 \times 2^{n-1} = 2^{n+1}$

On en conclut donc, par récurrence, que $u_n = 2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Exercice 15. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 2$, la fonction f_n, définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n$, est dérivable sur

$\mathbb{R}$, avec $f_n'(x) = nx^{n-1}$

Solutions :

Notons $\mathscr{P}(n) : f_n$ est dérivable

- **Initialisation** : $f_2(x) = x^2$, on a :

$$\frac{f_2(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = 2x+h$$

qui tend vers $2x$ lorsque h tend vers 0, par conséquent $\mathscr{P}(2)$ est vraie.

- **Hérédité** : Supposons que $\mathscr{P}(i)$ soit vraie $\forall i \geq n$, montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie i.e montrons que f_{n+1} est une fonction dérivable.
Notons que $f_{n+1}(x) = x^{n+1} = x^n \times x = f_n \times f_1$, or le produit de deux fonctions dérivables est une fonction dérivable, par conséquent f_{n+1} est dérivable et sa dérivée vaut :

$$f_{n+1}'(x) = f_n'(x)f_1(x) + f_n(x)f_1'(x) = nx^{n-1}x + x^{n-1}x = nx^n + x^n = (n+1)x^n$$

CQFD

Exercice 16. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$$

Montrer, par récurrence, que pour tout $n \geq 1$ on a $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq u_n \leq 1$

Solutions :

- **Initialisation** : $u_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, donc :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq u_1 \leq 1$$

- **Hérédité** : Supposons que, pour un entier $n \geq 1$ on ait

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq u_n \leq 1$$

Montrons que $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq u_{n+1} \leq 1$, pour cela considérons la fonction f définie sur $\mathrm{I} = [0;+\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$$

On a $u_{n+1} = f(u_n)$, de plus la fonction f est dérivable sur I et

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}}{2\sqrt{\frac{1+x}{2}}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{1+x}} > 0$$

Par conséquent f est une fonction strictement croissante sur I. On en déduit alors :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq u_1 \leq 1 \Longrightarrow f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leq u_{n+1} \leq f(1)$$

Or, $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $f(1) = 1$, donc

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq u_{n+1} \leq 1$$

Ainsi, pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq u_n \leq 1$