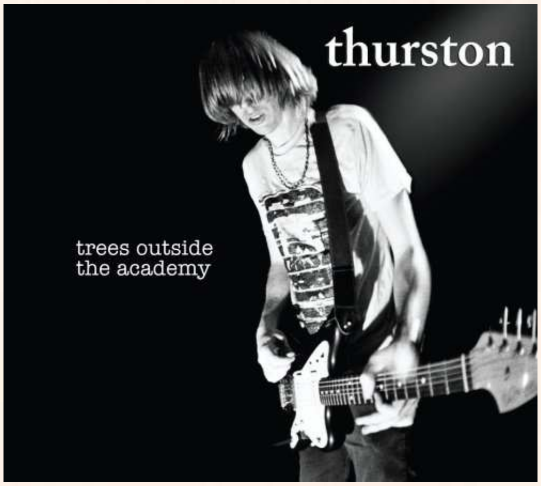
Chapitre 12

Lois Continues

Hors Sujet



Titre : « Tree Outside The Academy »
Auteur : Thurston Moore
Présentation succinte de l'auteur : Thurston Moore est un musicien américain né le 25 juillet 1958 dans l'État de Floride. Membre du groupe de rock Sonic Youth au sein duquel il chante et joue de la guitare.
Les artistes avec qui Thurston Moore travailla tout au long de sa carrière sont nombreux et assez éclectiques pour constituer un réseau aussi puissant que rare dans l'histoire de la musique actuelle.
Avec Lee Ranaldo, il est connu pour l'usage de nombreuses sortes d'accordages de guitare. C'est également un adepte de la guitare préparée. En effet, il joue de la guitare avec des baguettes de batterie, avec un marteau, avec une lime de fer, avec un klaxon de vélo ou encore avec une petite barre de fer. Thurston Moore étonne et surprends par la qualité des enregistrements des disques de Sonic Youth ou de ce disque solo, artiste sur lequel le temps semble n'avoir aucune emprise. La candeur ardente et entousiasmante de Moore souffle un vent de jeunesse d'une fraicheur absolue. Moore y va à l'économie question saturations, mais elles reviennent parfois au pas de charge, rappelant avec stridence mais sans insister les racines brutistes de tout le "Rock" engendré par Moore et ses collègues de Sonic Youth depuis vingt ans. Jouissif.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : D. Zancanaro
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jean Durand (Castelnaudary)

Table des matières

L'essentiel :

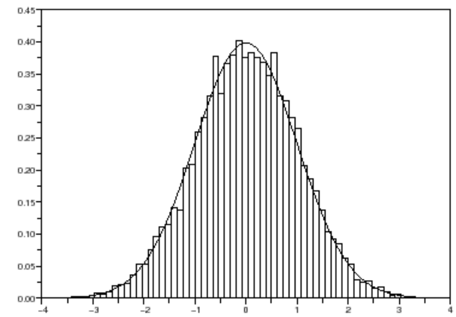
- ⇝ Utilisation de la loi uniforme.
- ⇝ Utilisation de la loi exponentiel de paramètre λ pour calculer une probabilité, à savoir :

$$p(X \in [a;b]) = \int_a^b e^{-\lambda t}\,dt$$

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
Thurston Moore (Sonic Youth)

Leçon 12

Lois Continues



Résumé

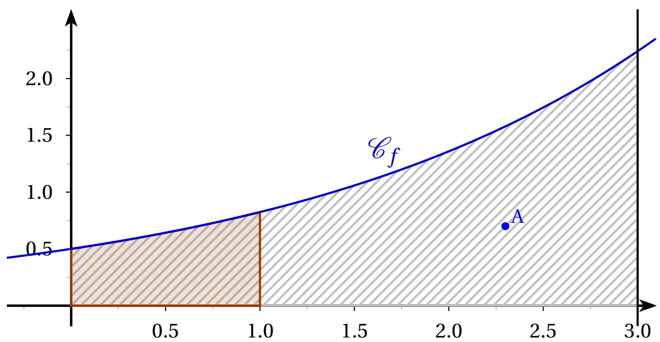
Vous connaissez déjà des nombres réels particuliers : les entiers, les rationnels, les irrationnels. D'autres catégories (pouvant recouper les ensembles habituels) sont utilisées. Ainsi, les nombres racines de polynômes à coefficients entiers sont appelés *nombres algébriques* : c'est le cas de 1 (solution de $x-1=0$), de $1/3$ (solution de $3x-1=0$), de $\sqrt{2}$ (solution de $x^2-2=0$), etc. On connaît des nombres qui ne sont pas algébriques, on les appelle les *nombres transcendants*. C'est le cas par exemple de π et de e. Au premier abord, il semble qu'il y ait beaucoup plus de nombres algébriques que de nombres transcendants (vous n'en connaissez que deux !). Un jour de pur délire, on pourrait même envisager qu'il y ait autant de nombres de chaque catégorie. Or, si on prend un nombre au hasard dans l'intervalle $[0,1]$, vous calculerez peut-être un jour que la probabilité d'obtenir un nombre transcendant vaut ....1 ! ! ! ! En effet, la « mesure »de l'ensemble des nombres algébriques est nulle. Pourtant, demandez à un ordinateur de vous donner un milliard de nombres au hasard entre 0 et 1, l'écran ne vous affichera que des nombres algébriques (décimaux même !).
L'ensemble $\mathbb{R}$ recèle bien d'autres résultats étonnants.
Daniel Bernoulli fut un pionnier en la matière.
Vous constaterez dans ce chapitre que ce chapitre mobilisera vos connaissances acquises dans le chapire sur l'intégration, ce qui sera un bon moyen pour vous de réviser si vous n'êtes pas encore au point.

Les probabilités continues permettent de modéliser des phénomènes extrêmement différents. Elles apparaissent au même moment que les probabilités modernes, autour de mathématiciens comme Abraham De Moivre (1667-1754). Mais c'et Gauss (1777-1855) qui donne son nom à la courbe liée à la loi normale et qui la relie en particulier au problème des observations astronomiques.
Les lois continues se sont multipliées depuis (loi exponentielle, loi de Weibull, loi de Pareto ...), ouvrant un champs immense d'applications et de recherches ...

I. Loi à densité sur un intervalle

I.1. Du discret au continu

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$ de courbe représentative $\mathscr{C}_f$.
L'expérience consiste à choisir un point au hasard dans le domaine $\mathscr{D}$ grisé ci-dessous, délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=3$.
On cherche à la probabilité que le point choisi appartienne à une certaine zone.



1. **Premier constat** :
   Est-il plus probable que le point choisi ait une abscisse entre 0 et 1 ou entre 2 et 3 ?
2. **Calculs de certaines probabilités**
   (a) Quelle est l'aire du domaine $\mathscr{D}$?
   (b) Quelle est la probabilité que le point appartienne à la zone $\mathscr{Z}$ délimitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$?
   (c) a et b sont deux nombres réels tels que $0 \leq a \leq b \leq 3$, même question avec les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.
   (d) Qu'obtient-on si $a=b$? Qu'en pensez-vous ?
   (e) Déduire la probabilité de choisir le point A.
3. **Tentative de Modélisation**
   (a) Quel est l'univers de cette expérience ?
   (b) En quoi se distingue-t-il des univers déjà rencontrés ?

Définition 1.

Lorsqu'une variable aléatoire peut prendre toutes ses valeurs dans un ensemble finis ou dénombrable (comme $\mathbb{N}$), on dit que sa loi est **discrète**.
Lorsqu'une variable aléatoire peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle de $\mathbb{R}$ (borné ou non), on dit que sa loi est **continue**.

Exemple :
Le temps d'attente d'un bus, la durée de vie d'un appareil, la distance d'un point d'impact au centre d'une cible admettent des lois continues.

I.2. Densité et loi de probabilité sur un intervalle I

Définition 2.

Soit I un intervalle.
On appelle densité de probabilité sur I toute fonction f continue et positive sur I telle que :

$$\int_{\mathrm{I}} f(x)dx = 1$$

Remarque :

- Le nombre $\int_{\mathrm{I}} f(x)dx$ est défini par : $\int_a^b f(x)dx$ si $\mathrm{I} = [a;b]$.
- Si I est un intervalle non borné, par exemple $[a, +\infty[$, alors la quantité notée $\int_{\mathrm{I}} f(t)dt$ désigne, lorsqu'elle existe, la limite suivante :

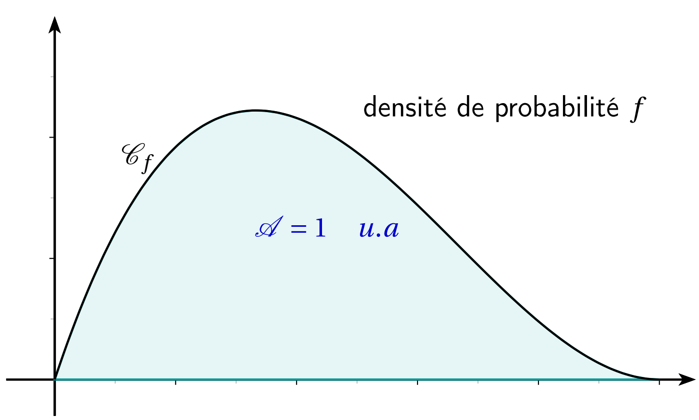
$$\int_{\mathrm{I}} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt$$

De la même manière si $\mathrm{I} =]-\infty;a]$ alors la quantité notée $\int_{\mathrm{I}} f(t)dt$ désigne, lorsqu'elle existe, la limite suivante :

$$\int_{\mathrm{I}} f(t)dt = \lim_{x\to-\infty}\int_x^a f(t)dt$$

- Enfin si $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ alors la quantité notée $\int_{\mathrm{I}} f(t)dt$ désigne, lorsqu'elle existe, la somme des limites suivante :

$$\int_{\mathrm{I}} f(t)dt = \lim_{x\to-\infty}\int_x^0 f(t)dt + \lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt$$



Exemple :

La fonction f définie sur $[1;e]$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ est une densité sur $[1;e]$, en effet, f en plus d'être continue et positive vérifie :

$$\int_1^e \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$$

Exercice 2.

1. Déterminer le nombre réel α tel que la fonction f définit par $f(x) = x + \alpha$ soit une densité de probabilité sur $[0;1]$.
2. Soit f une fonction constante sur un intervalle $[a,b]$ (avec $a < b$). Quelle doit être la valeur de la constante γ pour qu'elle soit une densité sur $[a;b]$?
3. Soit λ un réel strictement positif. Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^+$.

Solutions :

1. On doit avoir $\displaystyle\int_0^1 x + \alpha dx = 1 \Longleftrightarrow \left[\frac{x^2}{2} + \alpha x\right]_0^1 = 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{2} + \alpha = 1 \Longleftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$
2. On doit avoir $\displaystyle\int_a^b \gamma dx = 1 \Longleftrightarrow [\gamma x]_a^b = 1 \Longleftrightarrow \gamma(b-a) = 1 \Longleftrightarrow \gamma = \frac{1}{b-a}$
3. Calculons dans un premier temps : $\displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

$$\int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = -e^{-\lambda x} + e^0 = 1 - e^{-\lambda x}$$

Finalement :

$$\lim_{x\to+\infty} 1 - e^{-\lambda x} = 1$$

Ainsi on vient de montrer que :

$$\int_{\mathrm{I}} f(t)dt = 1$$

ce qui implique que f est une densité de probabilité.

I.3. Loi de probabilité

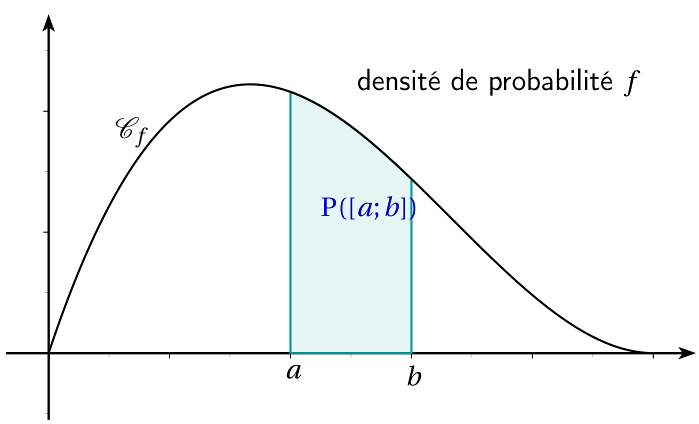
Proposition 1.

Soit I un intervalle et f une densité de probabilité sur I. L'application P qui, à tout sous-intervalle $[a,b]$ de I associe la quantité :

$$\mathrm{P}([a;b]) = \int_a^b f(t)dt$$

est appelée loi de probabilité sur I.

Illustration :



Remarques :

- $P([a;b])$ n'est rien d'autre que l'aire du domaine représenté ci-dessus. Notons que, puisque f est une densité de probabilité sur I, on a : $P(I) = 1$ et $0 \leq P([a;b]) \leq 1$. Quand on modélisera une expérience aléatoire I représentera l'univers de notre expérience.
- Un résultat étonnant : pour tout réel x_0 de I on a :

$$P(\{x_0\}) = \int_{x_0}^{x_0} f(t)\,dt = 0$$

  i.e que l'éventualité x_0 est un résultat **possible** de l'expérience de probabilité **nulle**, c'est ici une différence fondamentale avec le cas discret. Prenons un exemple, si on choisit un nombre au hasard entre 0 et 1, la probabilité que l'on choisisse par exemple $\frac{1}{3}$ est nulle même si l'événement peut avoir lieu. On dit alors que $\{x_0\}$ est un événement « quasi-impossible ».
  Toujours dans cette même expérience la probabilité de choisir un nombre inférieur à $\frac{1}{2}$ semble naturellement égale à $\frac{1}{2}$ i.e

$$P([0;0.5]) = \int_0^{0.5} f(t)\,dt = \frac{1}{2} \qquad \text{où } f \text{ reste à déterminer.}$$

  Nous allons dans le paragraphe suivant déterminer qu'elle est la densité de probabilité la plus à même de modéliser une telle expérience.
- Ainsi

$$p\big(]a;b[\big) = p\big([a;b[\big) = p\big(]a;b]\big) = p\big([a;b]\big)$$

- Grâce aux propriétés de l'intégrale, on retrouve les trois règles de définitions d'une probabilité :
  1. $P \in [0;1]$
  2. $P(\Omega) = 1$
  3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ avec $A \cap B = \emptyset$

Exemple :

La fonction $\begin{array}{rcccl} f & : & [-1;7] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \frac{1}{8} \end{array}$ est une densité de probabilité sur $[-1;7]$

Auquel cas il suit que $P([2,7]) = \int_2^7 \frac{1}{8}\,dt = \frac{5}{8}$

I.4. Variable aléatoire continues

Sont dites continues les variables aléatoires qui prennent leurs valeurs dans un intervalle I.

Définition 3.

Soit une loi de probabilité P sur I un intervalle de densité f.
On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans I suit la loi de probabilité P si :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)\,dt \qquad \forall a, b \in I$$

Exercice 3.

1. Montrer que f est la densité d'une loi de probabilité P avec :

$$I = [0;1] \qquad \text{et} f(x) = 2x$$

2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans I qui suit la loi de probabilité P, déterminer $P\left(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4}\right)$
3. Le résultat précédent permet-il d'envisager que P modélise le choix d'un nombre au hasard entre $[0;1]$?
4. Déterminer $P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{4}\right)$.
5. Que penser du résultat précédent ?

Solutions :

1. On a :
$$\int_0^1 2x\,dx = \left[x^2\right]_0^1 = 1 - 0 = 1$$
ce qui montre que f est la densité d'une loi de probabilité P.
2. On a :
$$P\left(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4}\right) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} 2x\,dx = \left[x^2\right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} = \frac{9}{16} - \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$$
3. oui.
4. $$P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{4}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} 2x\,dx = \left[x^2\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} = \frac{9}{16} - \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$$
5. Cette loi de probabilité ne modélise pas l'expérience consistant à choisir un nombre au hasard entre 0 et 1, en effet le résultat attendu à la question précédente est $\frac{1}{4}$.

Définition 4.

L'espérance et la variance d'une variable aléatoire X suivant une loi de probabilité de densité f sur I sont définies par :

$$E(X) = \int_a^b t f(t)\,dt \qquad \text{et} \qquad V(X) = E\left(\left(X - E(x)\right)^2\right) = E\left(X^2\right) - E^2(X)$$

Exercice 4. Un entrepôt accueille tous les matins des camions de livraison sur un créneau de deux heures d'ouverture, de 7h30 à 9h30. On s'intéresse à l'heure d'arrivée T d'un camion qui se présente tous les matins à l'entrepôt aux heures d'ouverture.
On admet que T suit la loi de probabilité de densité $f : x \longmapsto |x - 8.5|$ sur l'intervalle $I = [7.5; 9.5]$.

- ⇝ Tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle I.
- ⇝ Vérifier que la fonction f est une densité de probabilité sur $[7.5; 9.5]$.
- ⇝ Calculer la probabilité d'arrivée du camion entre 9h00 et 9h30.
- ⇝ En déduire la probabilité que le camion arrive avant 9h00.
- ⇝ Calculer la probabilité d'arrivée du camion entre 8h00 et 9h00.
- ⇝ Calculer l'espérance de la variable T.

II. Deux exemples de lois continues

II.1. La loi uniforme sur $[a;b]$

Exercice 5. Soit f une fonction constante sur un intervalle $I = [a;b]$.

1. Quelle doit être sa valeur pour que f soit une densité sur cet intervalle ?
2. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de densité f sur $[a,b]$. Calculer $P(0 \leq X \leq 0.25)$ puis $P(c \leq X \leq d)$ pour tout $c \leq d$ appartenant à I.
3. Calculer l'espérance de X.

Définition 5. (proposition)

On appelle **loi uniforme** sur $I = [a;b]$, la loi de probabilité dont la densité est la fonction constante f définie sur I par

$$f(t) = \frac{1}{b-a}$$

Preuve

$$\int_a^b \frac{1}{b-a}\,dt = \left[\frac{t}{b-a}\right]_a^b = 1.$$

f est bien une densité sur $[a;b]$.

Remarques :

- Soit $J = [\alpha;\beta]$ un sous intervalle de I on a alors :

$$P(J) = \int_\alpha^\beta \frac{1}{b-a}\,dt = \frac{\beta-\alpha}{b-a}$$

- Dans le cas où $I = [0;1]$, la probabilité du sous-intervalle de I $[\alpha;\beta]$ est donc égale à :

$$P(J) = \frac{\beta-\alpha}{1-0} = \beta-\alpha$$

Il s'agit de la loi de probabilité que nous choisissons pour modéliser le choix aléatoire d'un nombre entre 0 et 1.
On obtient dans ce cas,

$$P([0;0.5]) = 0,5-0 = \frac{1}{2} \qquad \text{c'est bien le résultat attendu}$$

ou encore :

$$P\left(\left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right]\right) = \frac{3}{4}-\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \qquad \text{c'est naturel !!}$$

- La loi uniforme généralise au continu ce que la loi équirépartie [1] est au discret. Elle modélise par conséquent de nombreuses situations, en particulier elle intervient « dans le choix d'un point au hasard sur un segment (ou d'un nombre au hasard dans un intervalle I) ».

1. celle pour laquelle chaque éventualité à la même probabilité

Exercice 1 :

Dans la journée, un métro passe toutes les 6 minutes à la station n°14.
Soit X le temps d'attente d'une personne à cette station.
On suppose que X suit la loi uniforme sur $[0;6]$.
Quelle est la probabilité que cette personne attende entre 3 et 5 minutes ?

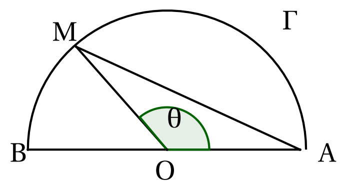
Solutions :

On a :

$$P(3 \leq X \leq 5) = \int_3^5 \frac{1}{6} dt = \frac{5-3}{6} = \frac{1}{3}$$

Application :

Un point M est pris au hasard sur le demi-cercle Γ de diamètre $[AB]$, de centre O et de rayon 1.
Quelle est la probabilité p qe le triangle AOM soit d'aire inférieure ou égale à $0,25$?



Note : On admet que « choisir un point M au hasard sur le demi-cercle Γ »revient à dire que « l'angle $\theta = \widehat{AOM}$ suit la loi uniforme sur $[0;\pi]$ ».

Calculons dans un premier temps l'aire $\mathscr{A}$ du triangle AOM, en notant H le pied de la hauteur issue de M dans le triangle AOM on a :

$$\mathscr{A} = \frac{OA \times HM}{2} = \frac{HM}{2}$$

Déterminons HM, en raisonnant dans le triangle rectangle HOM. Exploitons le sinus de l'angle $\widehat{HOM}$ qui vaut suivant la position de M soit θ soit $\pi - \theta$. On a $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$, par conséquent :

$$\sin\theta = \frac{HM}{OM} = HM$$

Au final

$$\mathscr{A} = \frac{\sin\theta}{2}$$

Ainsi

$$0 \leq \mathscr{A} \leq \frac{1}{4} \Longleftrightarrow 0 \leq \frac{\sin\theta}{2} \leq \frac{1}{4} \Longleftrightarrow 0 \leq \sin\theta \leq \frac{1}{2} \Longleftrightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \quad \text{ou} \quad \frac{5\pi}{6} \leq \theta \leq \pi$$

De plus

$$P\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\pi} dt = \frac{\frac{\pi}{6}}{\pi} = \frac{1}{6}$$

et

$$P\left(\frac{5\pi}{6} \leq \theta \leq \pi\right) = \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} \frac{1}{\pi} dt = \frac{\pi - \frac{5\pi}{6}}{\pi} = \frac{1}{6}$$

Au final, comme les événements $\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}\right)$ et $\left(\frac{5\pi}{6} \leq \theta \leq \pi\right)$ sont disjoints on obtient :

$$P(\mathscr{A} \leq 0,25) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

Proposition 2.

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $\Omega = [a;b]$. L'espérance de X est :

$$E(X) = \int_a^b t \times \frac{1}{b-a} dt = \frac{a+b}{2}$$

Remarques :

- La loi uniforme modélise le choix aléatoire d'un nombre réel X de l'intervalle Ω, tous les nombres ayant le même « poids », autrement dit les nombres étant **uniformément** répartis.
- La probabilité d'un intervalle $I \subset \Omega$ est proprotionnelle à sa taille.

Preuve

$$E(X) = \int_a^b t \times \frac{1}{b-a} dt = \left[\frac{1}{2(b-a)} \times t^2\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

Exemple :

Dans la journée, un métro passe toutes les 6 minutes à la station n°14.
Soit X le temps d'attente d'une personne à cette station. On suppose que X suit la loi uniforme sur $[0;6]$.

Quel est le temps moyen d'attente ?

II.2. La loi exponentielle de paramètre λ

Définition 6. (Proposition)

Soit $\lambda > 0$ un réel.
On appelle **loi exponentielle de paramètre** λ la loi de probabilité dont la densité est la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Remarques :

- On a déjà montré que f est bien une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^+$.
- Une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ suit une loi exponentielle de paramètre λ lorsque la probabilité de l'événement $(0 \leq T \leq t)$ noté simplement $(T \leq t)$ est $\displaystyle\int_0^t \lambda e^{-\lambda s} ds$.
  On a vu alors que
  $$P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$
  et donc par conséquent
  $$P(T > t) = e^{-\lambda t}$$

Exercice 6. Soit f une fonction exponentielle définie sur un intervalle $I = [O;+\infty[$ du type $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ avec $\lambda > 0$ un réel fixé.

1. Vérifier que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^+$, f est une densité sur I.

2. On note désormais T la variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ sur I.
   (a) Calculer $\mathrm{P}(5 \leq \mathrm{T} \leq 10)$.
   (b) Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{T} \leq 15)$. En déduire $\mathrm{P}(\mathrm{T} \geq 15)$.
   (c) Pour tout réel $c \in \mathrm{I}$, calculer $\mathrm{P}(\mathrm{T} \leq c)$ et en déduire $\mathrm{P}(\mathrm{T} \geq c)$.
   (d) Pourquoi ne pouvez-vous pas calculer l'espérance de T ?
   (e) i. Déterminer les réels c et d tels que la fonction

$$\mathrm{G} : t \longmapsto (ct+d)e^{-\lambda t}$$

   soit une primitive sur $[0;+\infty[$ de la fonction $g : x \longmapsto \lambda \times te^{-\lambda t}$.

   ii. En déduire pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^x tf(t)dt$.

   iii. Déterminer alors $\mathrm{E}(\mathrm{T})$.

Propriété 1.

Soit T est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Pour tout $a \geq 0$ on a :

- $\mathrm{P}(\mathrm{T} \leq a) = \mathrm{P}(\mathrm{T} < a) = 1 - e^{-\lambda a}$
- $\mathrm{P}(\mathrm{T} \geq a) = \mathrm{P}(\mathrm{T} > a) = e^{-\lambda a}$
- $\mathrm{E}(\mathrm{T}) = \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^x tf(t)dt = \frac{1}{\lambda}$

Preuve

- Pour tout $a \in \mathbb{R}^+$ on a $\mathrm{P}(\mathrm{T} \leq a) = \mathrm{P}(\mathrm{T} < a) = \displaystyle\int_0^a \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^a = -e^{-\lambda a} + e^{-\lambda 0} 1 - e^{-\lambda a}$
- $\mathrm{P}(\mathrm{T} \geq a) = \mathrm{P}(\mathrm{T} > a) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{T} \leq a) = e^{-\lambda a}$
- **Type ROC :** Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}+$ par

$$\mathrm{G}(t) = -\left(t + \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda t}$$

alors

$$\mathrm{G}'(t) = -\left(e^{-\lambda t} + \left(t + \frac{1}{\lambda}\right) \times \left(-\lambda e^{-\lambda t}\right)\right) = t \times \lambda e^{-\lambda t} = tf(t)$$

Ainsi

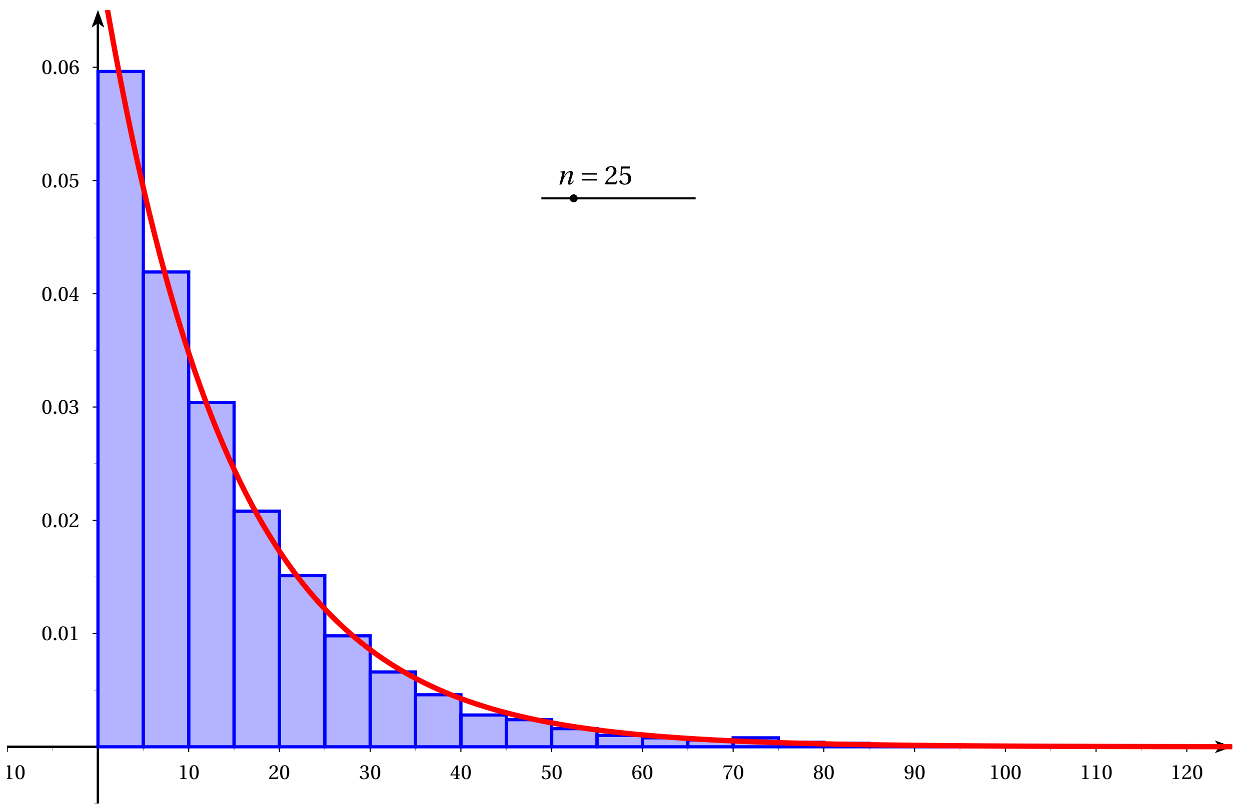
$$\mathrm{G}'(t) = tf(t) \iff \int_0^x tf(t)dt = [\mathrm{G}(t)]_0^x = -\left(\left(x + \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Donc $\mathrm{E}(\mathrm{T}) = \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^x tf(t)dt = \frac{1}{\lambda}$

Remarque : La loi exponentielle modélise des durées de vie particulière.

Exemple :

On considère un matériel électronique dont le temps de fonctionnement exprimé en semestres, est modélisé par une variable aléatoire T prenant ses valeurs dans $[0;+\infty[$.
On a regardé 5000 temps de fonctionnement de ce matériel et on a regroupée les données en classes d'amplitude 5 unité de temps.
Il n'y a aucun appareil qui a duré plus de 125 semestres. On a donc 25 classes.
Sur Géogébra, on a alors réalisé l'histogramme associé à cet échantillon, ainsi que la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(t) = 0.07e^{-0.07t}$.



On constate que la forme globale de l'histogramme ressemble à celle de la courbe $\mathscr{C}_f$.
Si l'on diminue l'amplitude des classes, elle s'en rapproche encore plus.

On rappelle que sur un histogramme, les probabilités sont données par les aires des rectangles.
Ainsi avec l'histogramme on trouve $P(T \leq 5) \simeq 0.059 \times 5 = 0.295$ et $P(5 \leq T \leq 15) \simeq 0.042 \times 5 + 0.03 \times 5 = 0.36$
Avec la fonction densité on trouve :

$$P(T \leq 5) = \int_0^5 f(t)dt = \int_0^5 0.07e^{-0.07t}dt = \left[-e^{-0.07t}\right]_0^5 = 1 - e^{-0.35} \simeq 0.295$$

$$P(5 \leq T \leq 15) = \int_5^{15} f(t)dt = \int_5^{15} 0.07e^{-0.07t}dt = \left[-e^{-0.07t}\right]_5^{15} = e^{-0.35} - e^{-1.05} \simeq 0.355$$

Exercice 7. On suppose que la durée de vie X d'une voiture suit une loi exponentielle de paramètre 0.1.

1. Calculer la probabilité qu'une voiture dure entre 5 et 8 ans.
2. Calculer la probabilité qu'une voiture dépasse 10 ans de durée de vie.
3. On sait qu'une voiture a duré déjà 10 ans.
   Quelle est la probabilité qu'elle dépasse 12 ans de durée de vie ?
4. Comparer le résultat précédent avec la probabilité que la durée de vie de la voiture dépasse deux ans.

On constate que la probabilité que la voiture dure deux ans de plus ne dépend pas de son âge. On dit que X est une loi de durée de vie ***sans vieillissement****.*

Propriété 2.

Soit T est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
Pour tous réels t et h strictement positifs, on a :

$$\mathrm{P}_{(\mathrm{T}\geq t)}(\mathrm{T} \geq t+h) = \mathrm{P}(\mathrm{T} \geq h)$$

Preuve

Pour tous réels positifs t et h on a $\mathrm{P}(\mathrm{T} \geq t+h) = e^{-\lambda(t+h)}$ et $\mathrm{P}(\mathrm{T} \geq t) = e^{-\lambda t}$.
On a $\mathrm{P}_{(\mathrm{T}\geq t)}(\mathrm{T} \geq t+h) = \dfrac{\mathrm{P}\big((\mathrm{T} \geq t)\cap(\mathrm{T} \geq t+h)\big)}{\mathrm{P}(\mathrm{T} \geq t)} = \dfrac{\mathrm{P}\big(\mathrm{T} \geq t+h\big)}{\mathrm{P}(\mathrm{T} \geq t)} = \dfrac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = \mathrm{P}(\mathrm{T} \geq h)$

Remarque : Cette propriété s'appelle « durée de vie sans vieillissement », car elle montre que la durée de vie T sur un laps de temps h, ne dépend pas de l'âge t à partir duquel on considère cet événement.
On parle aussi de **loi sans mémoire**.
Les lois exponentielles modélisent des phénomènes dont la durée de vie n'est pas affectée par l'âge, comme par exemple celle d'un atome radioactif, ou celle de certaines tribus (dont les maladies et autres n'entraînent que des morts non dues à l'âge des personnes), etc

II.3. Loi de durée de vie sans vieillissement [Aux limites du programme]

Définition 7.

Soit X la variable aléatoire correspondant à la durée de vie d'un individu ou d'un objet. On dit que X suit la loi de durée de vie sans vieillissement lorsque la probabilité que l'individu (ou l'objet) soit vivant (ou fonctionne) à l'instant$t+h$ sachant qu'il est vivant (ou qu'il fonctionne) à l'instant t ne dépend pas de son âge t i.e

$$\mathrm{P}_{\mathrm{X}>t}(\mathrm{X} > t+h) = \mathrm{P}(\mathrm{X} > h)$$

Remarque : la loi de durée de vie sans vieillissement s'applique-t-elle aux humains ? Non, ce n'est pas un modèle pertinent à long terme. En effet, un bébé à la naissance peut raisonnablement espérer vivre plusieurs dizaines d'années alors qu'on ne peut en dire autant d'un vieillard. Le modèle semble plus proche de la réalité lorsque h est petit (dans ce cas). Par exemple la probabilité de vivre encore une minute semble comparable indépendamment de l'âge. Mais cette loi s'applique plutôt à des composants électroniques par exemple.

II.3.a. Une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle suit une loi de durée sans vieillissement

Si X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ sur $\mathbb{R}^+$ alors on a vu que :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} > t) = e^{-\lambda t}$$

Soit h un réel strictement positif on a :

$$\mathrm{P}_{\mathrm{X}>t}(\mathrm{X} > t+h) = \frac{\mathrm{P}\left((\mathrm{X} > t)\cap(\mathrm{X} > t+h)\right)}{\mathrm{P}(\mathrm{X} > t)} = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{X} > t+h)}{\mathrm{P}(\mathrm{X} > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = \mathrm{P}(\mathrm{X} > h)$$

Ainsi X suit bien une loi de durée sans vieillissement.
Examinons désormais la réciproque.

II.3.b. Une variable aléatoire qui suit une loi de durée sans vieillissement suit une loi exponentielle

Réciproquement, soit X une variable aléatoire suivant une loi de durée de vie sans vieillissement. Alors pour tout réel t de $\mathbb{R}^+$ et tout réel h de $\mathbb{R}^+$:

$$\mathrm{P}_{\mathrm{X}>t}(\mathrm{X}>t+h)=\mathrm{P}(\mathrm{X}>h) \Longleftrightarrow \frac{\mathrm{P}(\mathrm{X}>t+h)}{\mathrm{P}(\mathrm{X}>t)}=\mathrm{P}(\mathrm{X}>h) \Longleftrightarrow \mathrm{P}(\mathrm{X}>t+h)=\mathrm{P}(\mathrm{X}>t)\mathrm{P}(\mathrm{X}>h)$$

Notons ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\phi(t)=1-\mathrm{P}(\mathrm{X}\leq t)=\mathrm{P}(\mathrm{X}>t)$$

Montrons que :

- $\phi(0)=1$
- ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$

Pour cela notons F la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\mathrm{F}(t)=\mathrm{P}(\mathrm{X}\leq t)=\displaystyle\int_0^t f(x)dx$.
F est la primitive de la densité f qui s'annule en 0 i.e $\mathrm{F}'=f$ et $\mathrm{F}(0)=0$, or :

$$\phi(t)=1-\mathrm{F}(t)$$

Par conséquent ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $\phi(0)=1-0=1$.
On sait que $\phi(t+h)=\phi(t)\phi(h)$, que ϕ est dérivable et vérifie $\phi(0)=1$. On en déduit (leçon sur les équations différentielles du type $y'=ky$ et la fonction exponentielle) qu'il existe un réel a tel que pour tout réel t de $\mathbb{R}^+$:

$$\phi(t)=e^{at}$$

Mais comme ϕ est en fait une probabilité, on a pour tout t de $\mathbb{R}^+$:

$$\phi(t)\leq 1 \Longleftrightarrow e^{at}\leq 1 \Longleftrightarrow at\leq \ln 1=0 \Longleftrightarrow a\leq 0$$

Ainsi posons $\lambda=-a>0$ on obtient :

$$\phi(t)=e^{-\lambda t} \Longleftrightarrow 1-\mathrm{F}(t)=e^{-\lambda t}$$

En dérivant membre à membre :

$$-f(t)=-\lambda e^{-\lambda t} \Longleftrightarrow f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$$

La variable aléatoire X suit donc une loi exponentielle de paramètre λ.
Nous avons démontré le résultat suivant :

Théorème 1.

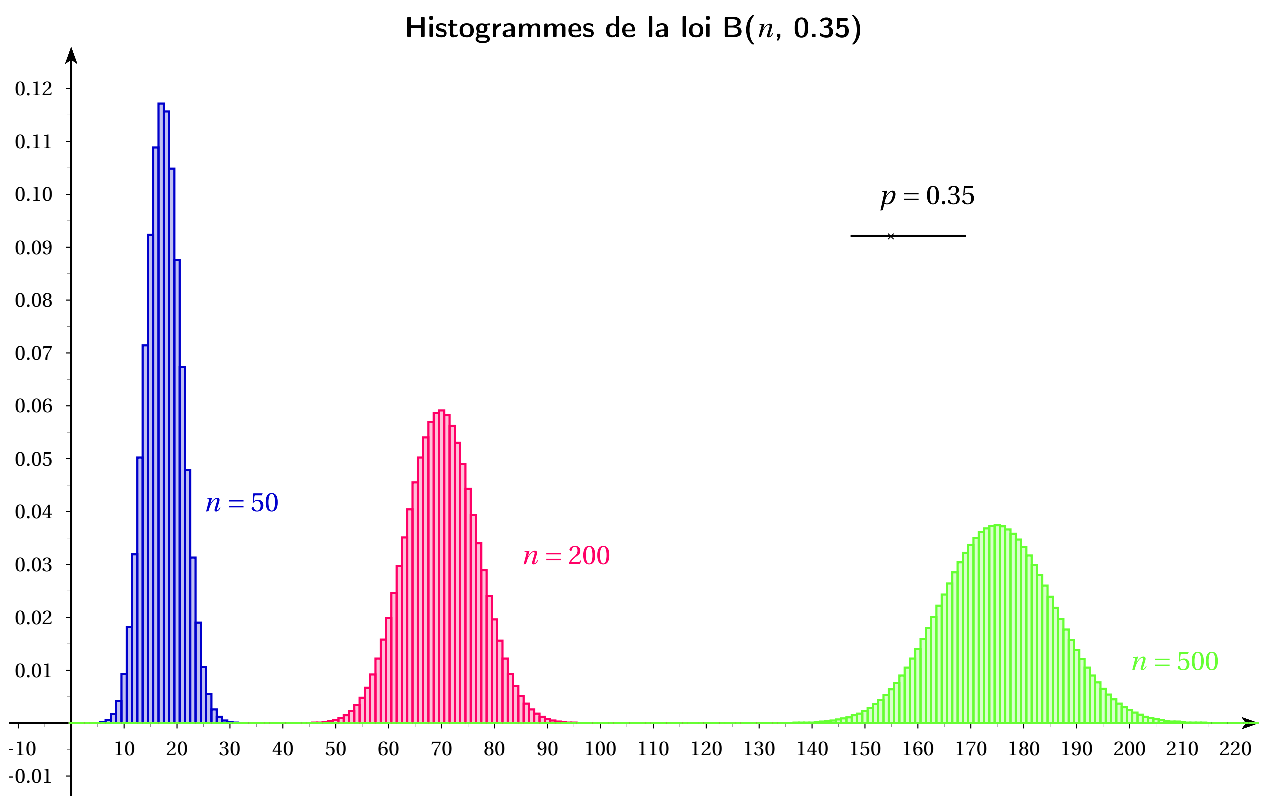
Une variable aléatoire X suit la loi de durée de vie sans vieillissement si seulement si elle suit une loi exponentielle.

III. Approximation de la loi binomiale centrée réduite par une loi continue

III.1. Standardiser des variables aléatoires

Exercice 8. En Syldavie, la proportion de personnes pratiquant la danse sous-marine en scaphandre est $p = 0.35$. On prélève au hasard un échantillon de taille n dans la population Syldave (celle-ci étant assez grande pour considérer qu'il s'agit de tirages avec remise).
On désigne par X la variable aléatoire associant à un échantillon de taille n le nombre de syldaves de l'échantillon pratiquant la danse sous-marine en scaphandre (DSMS).

1. (a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   (b) Déterminer en fonction de n, l'espérance μ et l'écart-type σ de X.
   (c) Norbert a prélevé un échantillon de 50 Syldaves et a obtenu 21 syldaves pratiquant la DSMS.
   Simone, sur un échantillon de taille 200, a obtenu 79 syldaves pratiquant la DSMS.
   Fabrice quant à lui a obtenu sur un échantillon de 500 syldaves, 151 pratiquant la DSMS.
   A votre avis, lequel des trois a l'échantillon le plus représentatif de la population Syldave ?
2. On a représenté les histogrammes de la loi $B(n, 0.35)$ pour les trois valeurs de n précédentes.
   (a) Que se passe-t-il lorsque n varie ?
   (b) Quelle est la somme des aires des rectangles pour un n donné ?



On rappelle que dans un histogramme, les probabilités de chaque valeur possible pour X sont données par ***une aire de rectangle*** *: l'aire de chaque rectangle centré autour d'une valeur k vaut $P(X = k)$.*

Quand n varie, on obtient des histogrammes qui diffèrent par leurs positions et par leurs dispersions.

Conclusion

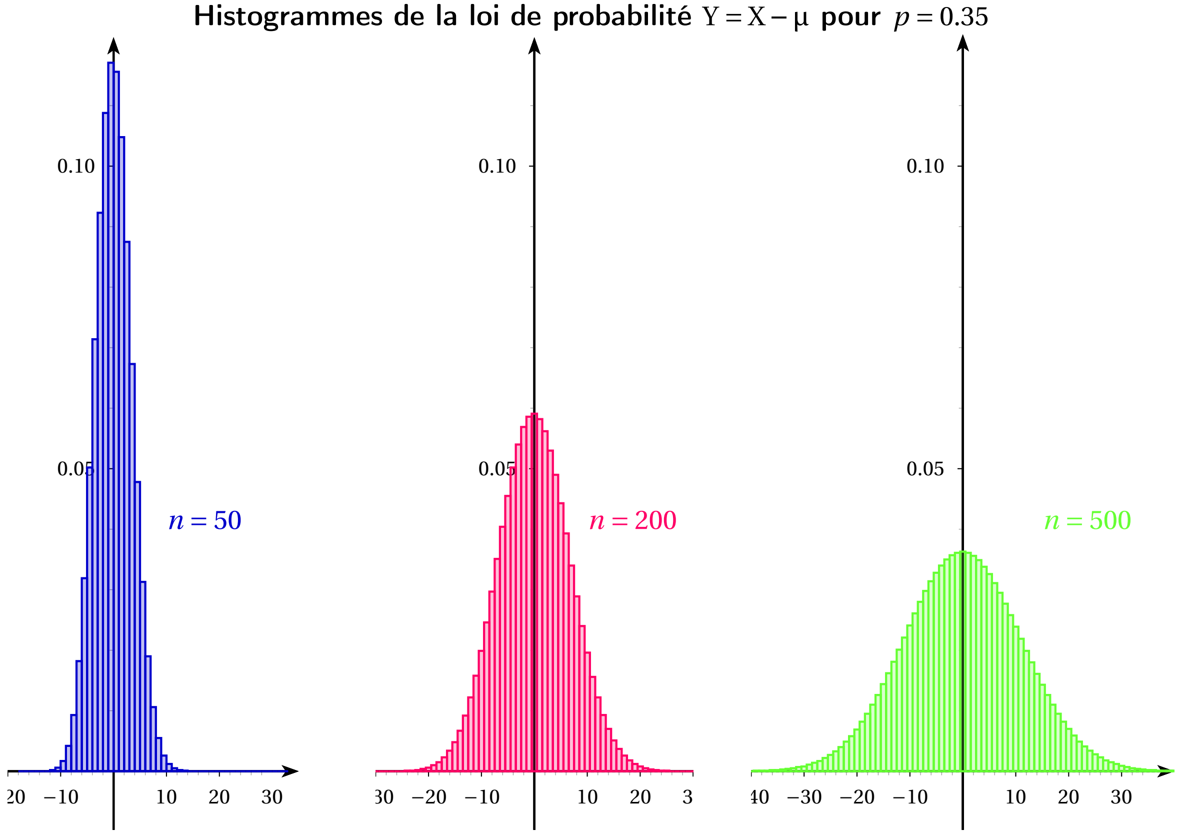
Les distributions de probabilité de deux variables aléatoires peuvent être très différentes, notamment en raison de la disparité de leur espérance ou de leur écart-type.
Il est alors difficile de les comparer.
En centrant et en réduisant les variables, on les rend indépendantes de l'unité choisie pour leurs valeurs, avec une espérance et un écart-type de standardisés de 0 et 1.
La comparaison de plusieurs variables aléatoires s'en trouve ainsi facilitée.

III.2. Centrer l'histogramme d'une loi binomiale

Exercice 9. On reprend le contexte de l'activité précédente et on considère la variable aléatoire $Y = X - \mu$.

1. Déterminer y tel que $P(X = k) = P(Y = y)$.
2. Calculer $E(Y)$ et $\sigma(Y)$.
   Pour cette raison on dit que la variable Y est centrée.
3. On a représenté les histogrammes de la loi de Y pour les trois valeurs de n précédente.
   (a) Expliquer.
   Valeurs prises par Y ? écart entre deux valeurs consécutives de y ? hauteur des rectangles : $P(X = k) = P(Y = y)$ **pr un** $y = k - \mu$
   (b) Que se passe-t-il lorsque n varie ?
   (c) Quelle est la somme des aires des rectangles pour un n donné ?

Histogrammes de la loi de probabilité $Y = X - \mu$ pour $p = 0.35$



On constate que dans n varie, la position des histogramme ne varie plus (ils restent centrés en 0), par contre ils diffèrent toujours dans leur dispersion

Remarques :

⇝ Une variable aléatoire est dite centrée lorsque son espérance vaut 0.

⇝ Si X désigne une variable aléatoire sur Ω la variable $Y = X - E(X)$ est centrée et $\forall k \in \Omega$ on a

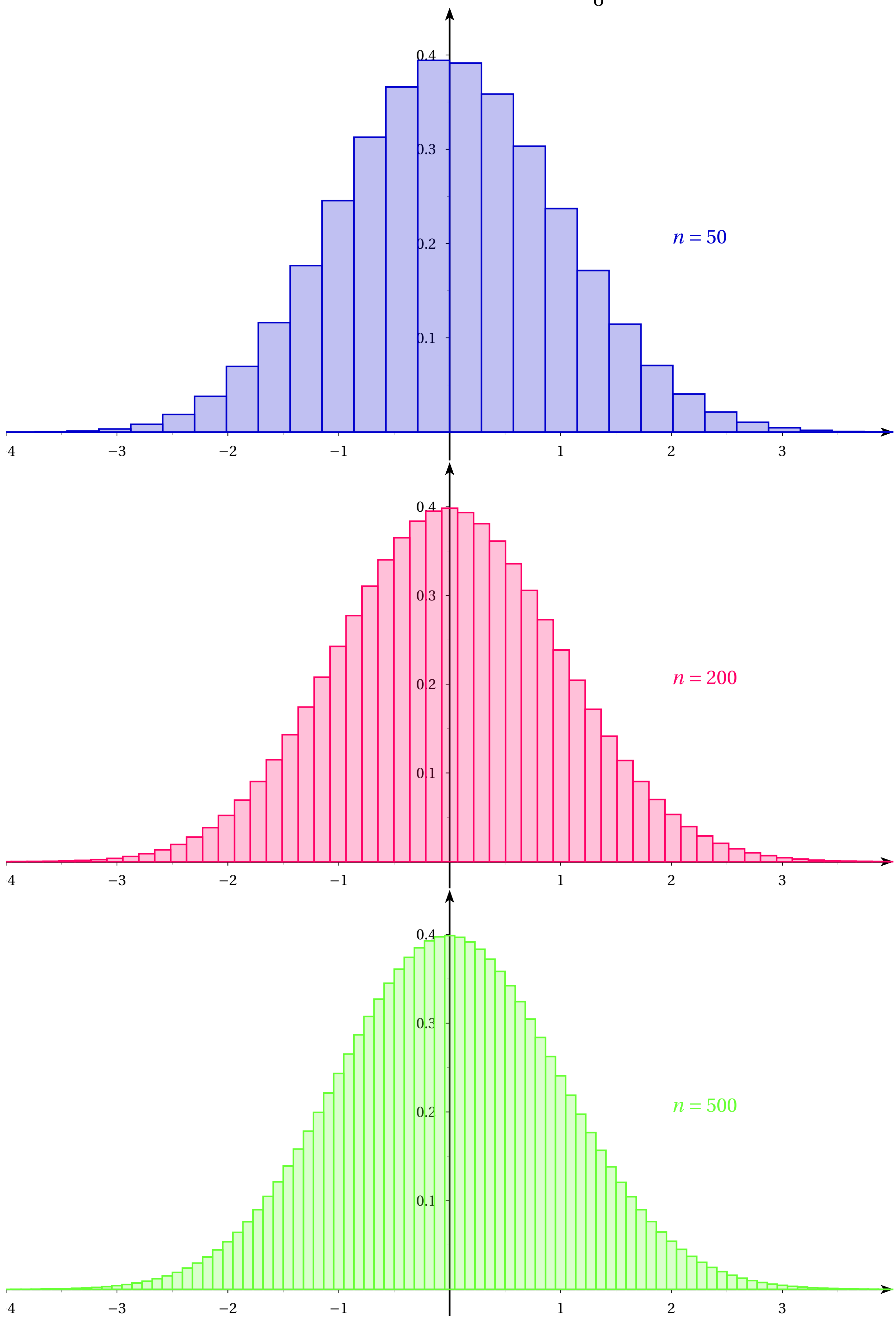
$$P(Y = k - E(X)) = P(X = k)$$

III.3. Réduire

Exercice 10. On reprend encore le contexte de l'activité précédente. Reste donc de la dispersion à stabiliser. Considérons pour cela la variable aléatoire $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$

1. Déterminer z tel que $P(X = k) = P(Z = z)$.
2. Calculer $E(Z)$ et $\sigma(Z)$.
   Pour cette raison on dit que la variable Z est centrée réduite.
3. On a représenté les histogrammes de la loi de Z pour les trois valeurs de n précédentes.
   (a) Expliquer.
   Valeurs prises par Z ? écart entre deux valeurs consécutives de z : $1/\sigma$, hauteur des rectangles : $P(X = k) = P(Z = z)$ pr un $z = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$
   (b) Que se passe-t-il lorsque n varie ?
   (c) Quelle est la somme des aires des rectangles pour un n donné ?
4. Dire alors lequel de Norbert, Simone ou Fabrice a l'échantillon le plus représentative de la population ?

Histogrammes des lois de probabilité de $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ **pour** $p = 0.35$



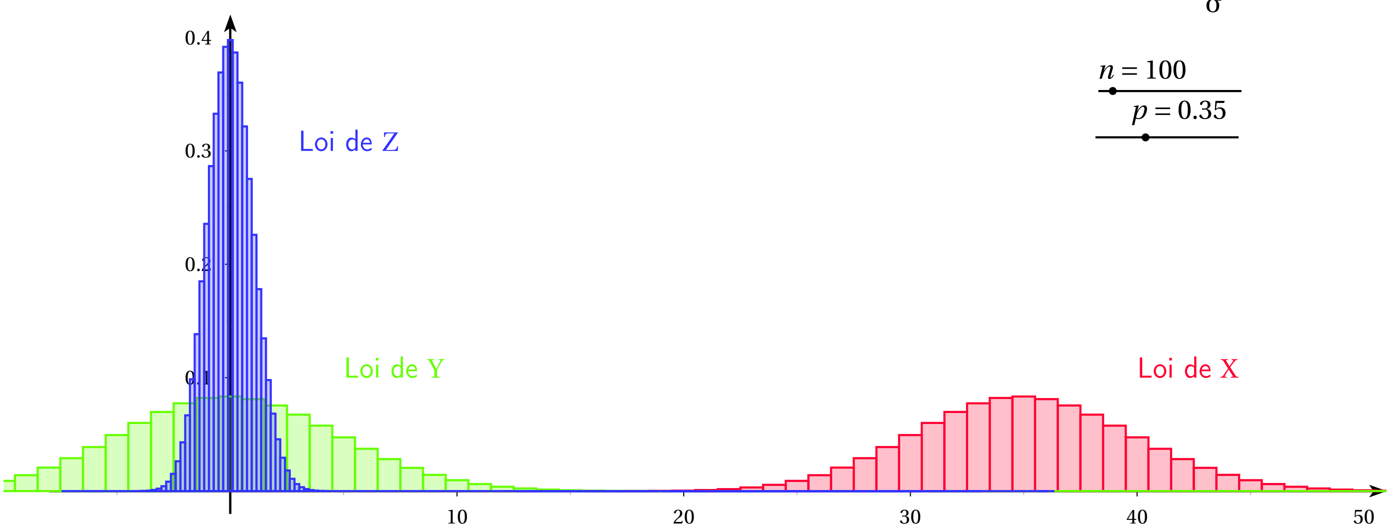
On constate que désormais quand n varie, l'allure des histogrammes change peu. On peut même dire que lorsque n devient grand, on aurait envie de l'approcher par la courbe d'une fonction continue...

Remarques :

- ⇝ Une variable aléatoire est dite centrée réduite lorsque son espérance vaut 0 et son écart-type 1.
- ⇝ Si X désigne une variable aléatoire sur Ω la variable $Z = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite et $\forall k \in \Omega$ on a

$$P\left(Z = \frac{k - E(X)}{\sigma(X)}\right) = P(X = k)$$

Résumé : Histogrammes des lois de probabilité de $X \hookrightarrow B(100, 0.35)$, $Y = X - \mu$ et $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$



III.4. Théorème de Moivre-Laplace

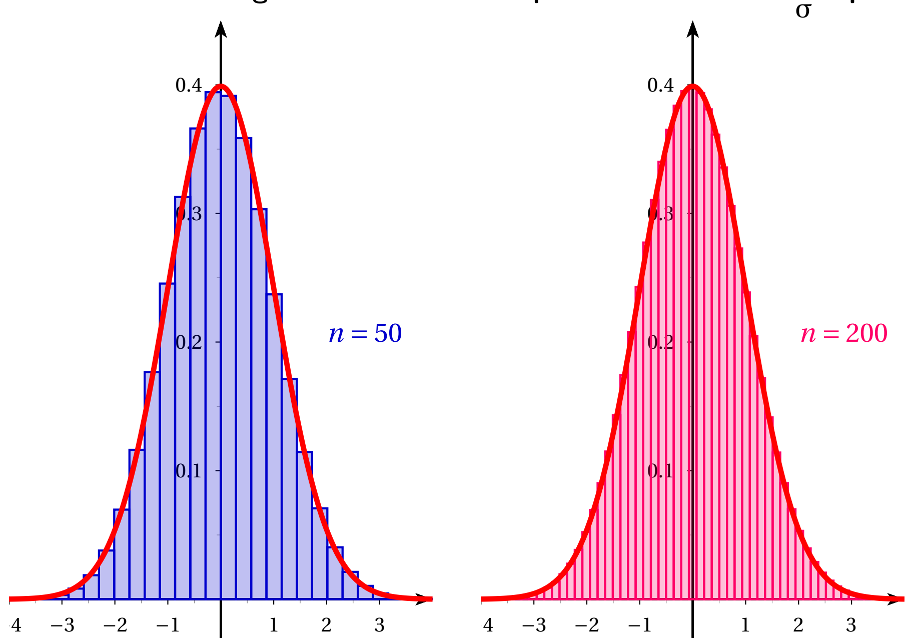
Exercice 11. Les lois de probabilité discrètes donnant lieu à des calculs fastidieux dans certaines situations, on cherche à approcher les résultats par ceux de calculs effectués avec des variables aléatoires continues à densité. Dans le cadre des programmes de Terminale, ce problème est traité pour les lois binomiales.

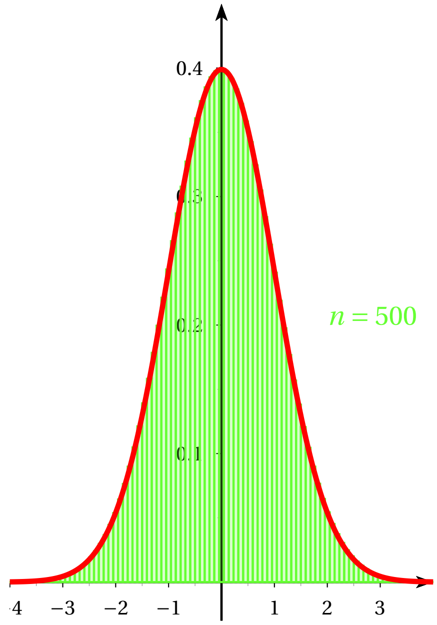
Reprenons alors l'exemple précédent. On introduit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

On a représenté ci-dessous la courbe de cette fonction sur les trois histogrammes de loi de Z.

1. Que constate-t-on ?
2. Conjecturer la valeur de $I = \lim\limits_{x\to-\infty}\displaystyle\int_x^0 f(t)dt + \lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt$, puis les valeurs de $I_1 = \lim\limits_{x\to-\infty}\displaystyle\int_x^0 f(t)dt$ et $I_2 = \lim\limits_{x\to+\infty} = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.
3. Que donne Géogébra ou votre calculatrice comme valeur approchée de $J = \displaystyle\int_{-1}^2 f(t)dt$?
4. Interpréter graphiquement cette intégrale, puis en termes de probabilités sur X.

Courbes de Gauss et Histogrammes des lois de probabilité de $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ **pour** $p = 0.35$





Rappel

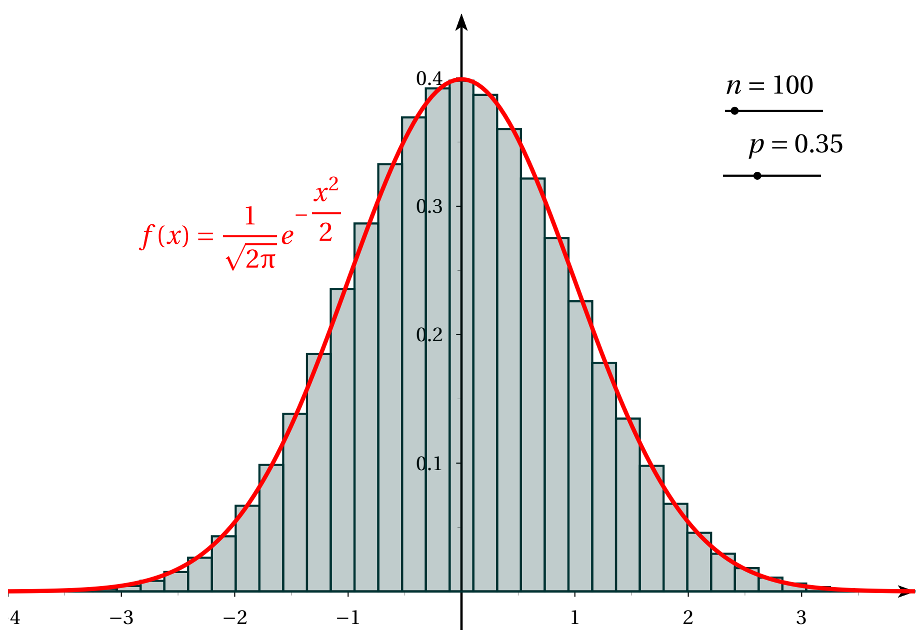
Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p, lorsque X compte les succès lors de n répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p.
Dans ce cas, $E(X) = np$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

Théorème 2. (Moivre-Laplace, Admis)

Soit X_n une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n;p)$. On pose $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

Pour tous réels a et b, avec $a < b$ on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P(a \le Z_n \le b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$



IV. La loi normale centrée réduite

IV.1. Définition

Proposition 3. (Admise)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$. On a :

$$\lim_{t\to-\infty}\int_t^0 f(x)dx = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to+\infty}\int_0^t f(x)dx = \frac{1}{2}$$

Ainsi, la fonction f étant de plus clairement continue est positive sur $\mathbb{R}$, est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Définition 8.

La loi normale centré réduite $\mathcal{N}(0,1)$ est la loi de probabilité ayant pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

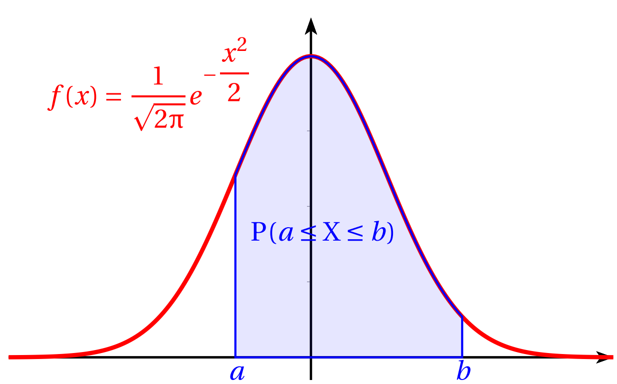
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

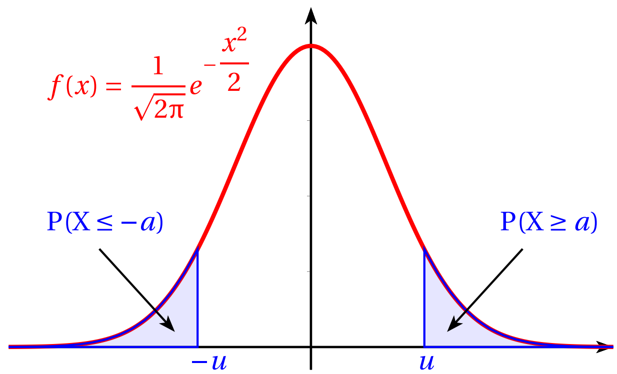
Remarques :

- La loi normale modélise des phénomènes naturels très fréquents (d'où son nom), qui résultent de l'addition de plusieurs causes indépendantes, comme la taille d'individus, le taux de cholestérol, les erreurs de mesure ...
- Ainsi, si une variable aléatoire X suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$, pour tous réels a et b tels que $a < b$ on a :

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

- On sait donc que $P(X \le 0) = P(X \ge 0) = \frac{1}{2}$
- La fonction f est paire, sa courbe est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. D'où :
  - Pour tout réel a on a $P(X \le -a) = P(X \ge a) = 1 - \mathbb{P}(X < a) = 1 - P(X \le a)$
  - Si $a \ge 0$ on a aussi $P(-a \le X \le a) = 2P(0 \le X \le a) = 1 - 2P(X > a) = 2P(X \le a) - 1$





Propriété 3.

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$. On a :

$$E(X) = \lim_{x \to -\infty} \int_x^0 t f(t) dt + \lim_{x \to +\infty} \int_0^x t f(t) dt = 0 \qquad \text{et} \qquad V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = 1$$

Ainsi une variable aléatoire qui suit une loi normale de paramètre 0 et 1 est centrée réduite.

Preuve

$\int_x^0 t f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^0 t e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_x^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-1 + e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$ D'où $\lim_{t \to -\infty} \int_x^0 t f(t) dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

De même $\int_0^x t f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} - 1\right)$ D'où $\lim_{x \to +\infty} \int_0^x t f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

Donc $E(X) = 0$

IV.2. Approximation de la loi binomiale

Le théorème de Moivre-Laplace implique donc, si une variable X_n suit une loi $\mathcal{B}(n, p)$ et que la loi de probabilité de la variable centrée réduite associée $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$, « tend vers »la loi normale centrée réduite, lorsque n devient grand .

Dans la pratique, on estime que quand X suit une loi $\mathcal{B}(n, p)$ avec $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$ on peut approximer la variable $Z = \frac{X - np}{np(1-p)}$ par une variable Z de loi $\mathcal{N}(0,1)$ puis se ramèner à la loi binomiale de X.

Exemple :

Si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(50; 0.2)$ on a

$$P(15 \leq X \leq 30) = P\left(\frac{15-10}{10 \times 40} \leq \frac{X-10}{10 \times 40} \leq \frac{30-10}{10 \times 40}\right) = P(0.0125 \leq Z \leq 0.05) \simeq \int_{0.0125}^{0.05} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \simeq 0.0150$$

Ce qui est bien plus rapide que d'ajouter chacun des $P(X = k)$ pour k variant de 15 à 30 !
Evidemment, actuellement, vous ne connaissez encore que la méthode fastidieuse, car vous ne connaissez pas de primitive à la densité de la loi normale ... Pour calculer cette intégrale, on a besoin de la calculatrice ou encore de tables de valeurs fournies par les énoncés.
La plupart des calculs liés à la loi normale seront donc des estimations.

Quelques approximations

n	15	50	100	100	100
p	0.4	0.4	0.4	0.02	0.98
$P(3 \leq X_n \leq 12)$	0.97	0.013	6×10^{-10}	0.32	2×10^{-135}
$P\left(\dfrac{3-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq Z \leq \dfrac{12-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$	0.94	0.010	55×10^{-10}	0.23	4×10^{-10}

On constate l'écart qui peut être important lorsque les critères de validité ne sont pas remplis ...

Exemple :

Pondichéry 2013

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

Cette entreprise emploie 220 salariés. On admet que la probabilité pour qu'un salarié soit malade une semaine donnée durant cette période d'épidémie est égale à $p = 0,05$.

On suppose que l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de l'état de santé de ses collègues.

On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés malades une semaine donnée.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
   Calculer l'espérance mathématique μ et l'écart type σ de la variable aléatoire X.
2. On admet que l'on peut approcher la loi de la variable aléatoire $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ par la loi normale centrée réduite c'est-à-dire de paramètres 0 et 1.
   On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
   Le tableau suivant donne les probabilités de l'évènement $Z < x$ pour quelques valeurs du nombre réel x.

x	$-1,55$	$-1,24$	$-0,93$	$-0,62$	$-0,31$	0,00	0,31	0,62	0,93	1,24	1,55
$P(Z < x)$	0,061	0,108	0,177	0,268	0,379	0,500	0,621	0,732	0,823	0,892	0,939

   Calculer, au moyen de l'approximation proposée en question b., une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité de l'évènement : « le nombre de salariés absents dans l'entreprise au cours d'une semaine donnée est supérieur ou égal à 7 et inférieur ou égal à 15 ».

IV.3. A la calculatrice

IV.3.a. TI82-83-84

Objectif	Affichage voulu	Méthode à suivre

Calculer $P(a \leq X \leq b)$
où $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
	`normalFRép(-1.5,2)`
	`.9104427093`
	
	`normalFRép(-1.5,2,1,5)`
	`.2707221556`
		Appuyer sur **2nde** + **var** pour obtenir **distrib**
		Puis choisir `2:normalFRép(`
		Compléter ensuite dans l'ordre les paramètres a et b.
		Préciser éventuellement les paramètres μ et σ si la loi normale n'est pas centrée réduite.
		
		La calculatrice demande σ et non σ^2 en argument !

Déterminer α **tel que**
$P(X \leq \alpha) = p$
où $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
	`FracNormale(.2)`
	`-.8416212335`
	
	`FracNormale(.2,1,5)`
	`-3.208106167`
		Aller dans **distrib**
		Puis choisir `3:FracNormale(`
		Compléter ensuite le paramètre $p \in [0;1]$.
		Préciser éventuellement les paramètres μ et σ si la loi normale n'est pas centrée réduite.

IV.3.b. TI89

Objectif	Affichage voulu	Méthode à suivre
Calculer $P(a \leq X \leq b)$ **où** $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	`tistat.normfdr(-1.5,2)` `.910443` `TIStat.normFdR(-1.5,2)` MAIN RAD AUTO FONC 4/30 `tistat.normfdr(-1.5,2,1` `.270722` `…Stat.normFdR(-1.5,2,1,5)` MAIN RAD AUTO FONC 5/30	Dans CATALOG ouvrir l'onglet F3 AppFlash Appuyer sur 6 pour aller à la lettre N. Choisir `normFdR(....TIStat` Compléter ensuite dans l'ordre les paramètres a et b. Préciser éventuellement les paramètres μ et σ si la loi normale n'est pas centrée réduite. *La calculatrice demande σ et non σ^2 en argument !*
Déterminer α **tel que** $P(X \leq \alpha) = p$**, où** $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	`tistat.invnorm(.2)` `-.841621` `TIStat.invNorm(0.2)` MAIN RAD AUTO FONC 6/30 `tistat.invnorm(.2,1,5)` `-3.20811` `TIStat.invNorm(0.2,1,5)` MAIN RAD AUTO FONC 7/30	Dans CATALOG ouvrir l'onglet F3 AppFlash Appuyer sur 9 pour aller à la lettre I. Choisir `invNorm(....TIStat` Compléter ensuite le paramètre $p \in [0;1]$. Préciser éventuellement les paramètres μ et σ si la loi normale n'est pas centrée réduite.

IV.3.c. Nspire CX Cas

Objectif	Affichage voulu	Méthode à suivre
Calculer $P(a \leq X \leq b)$ **où** $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	normCdf(-1.5,2,0,1) 0.910443 normCdf(-1.5,2,1,5) 0.270722	Dans l'onglet $2:\int\sum$ du catalogue Ouvrir la catégorie **`Probabilités`** . Puis la sous-catégorie **`Distributions`** Choisir **`Normale FdR`** Compléter ensuite dans l'ordre les paramètres a et b. Préciser éventuellement les paramètres μ et σ si la loi normale n'est pas centrée réduite. *La calculatrice demande σ et non σ^2 en argument !*
Déterminer α **tel que** $P(X \leq \alpha) = p$**, où** $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	invNorm(0.2,0,1) -0.841621 invNorm(0.2,1,5) -3.20811	Dans l'onglet $2:\int\sum$ du catalogue Ouvrir la catégorie **`Probabilités`** . Puis la sous-catégorie **`Distributions`** Choisir **`Inverse Normale`** Compléter ensuite le paramètre $p \in [0;1]$. Préciser éventuellement les paramètres μ et σ si la loi normale n'est pas centrée réduite.

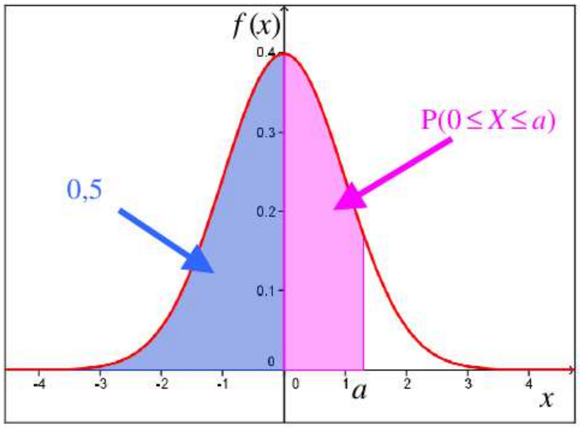
Remarques :

- ⇝ Pour calculer $P(X \leq 1)$, il faudra penser à écrire $P(X \leq 1) = P(X \leq 0) + P(0 \leq X \leq 1) = \dfrac{1}{2} + P(0 \leq X \leq 1)$, ce qui s'obtient désormais à la calculatrice. On trouve environ 0.84.

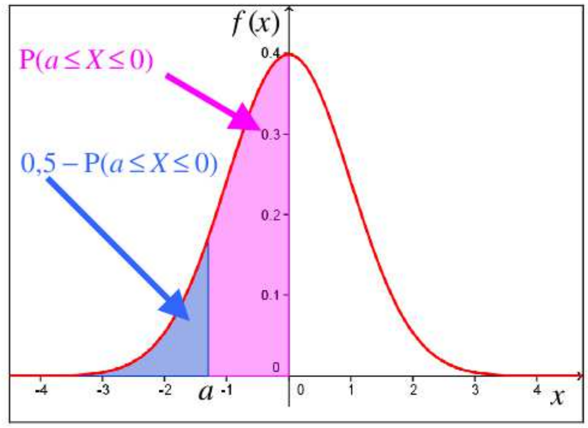
- ⇝ De même, pour avoir $P(X \leq -1)$ on écrira $P(X \leq -1) = P(X \leq 0) - P(-1 \leq X \leq 0) = \dfrac{1}{2} - P(-1 \leq X \leq 0)$. On trouve environ 0.16.

⇝ Visualiser les aires sous la courbe aide à faire ses transformations.
De manière générale, on peut voir que pour calculer $P(X \le a)$:

Si $a \ge 0$ on utilise $P(X \le a) = 0.5 + P(0 \le X \le a)$



Si $a \le 0$ on utilise $P(X \le a) = 0.5 - P(a \le X \le 0)$



IV.4. Répartition de l'aire sous la courbe

Théorème 3.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.
Pour tout réel $\alpha \in]0;1[$, il existe un unique réel positif u_α tel que

$$P(-u_\alpha \le X \le u_\alpha) = 1-\alpha$$

Preuve

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(t) = P(-t \le X \le t) = \int_{-t}^{t} f(x)dx$ où f est la fonction densité de la loi normale centrée réduite.
On cherche à applique le TVI à g. Comme f est paire, on a pour tout t positif, $g(t) = 2\int_0^t f(x)dx$
De plus, f est continue et positive, donc $2f$ aussi, et g est la primitive de $2f$ qui s'annule en 0 (d'après le théorème fondamental).
Ainsi g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ donc continue sur $\mathbb{R}^+$.
Ensuite, il est clair que $2f$ strictement positive implique que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
Enfin, comme $\alpha \in]0;1[$ on a $1-\alpha \in]0,1[$ et on a $g(0) = 0$ et $\lim_{t\to+\infty} g(t) = \lim_{t\to+\infty} 2\int_0^t f(x)dx = 2\times\frac{1}{2} = 1$.
D'après le corollaire du TVI, il existe un uniquement réel $u_\alpha \in]0;1[$ tel que $g(u_\alpha) = 1-\alpha$.

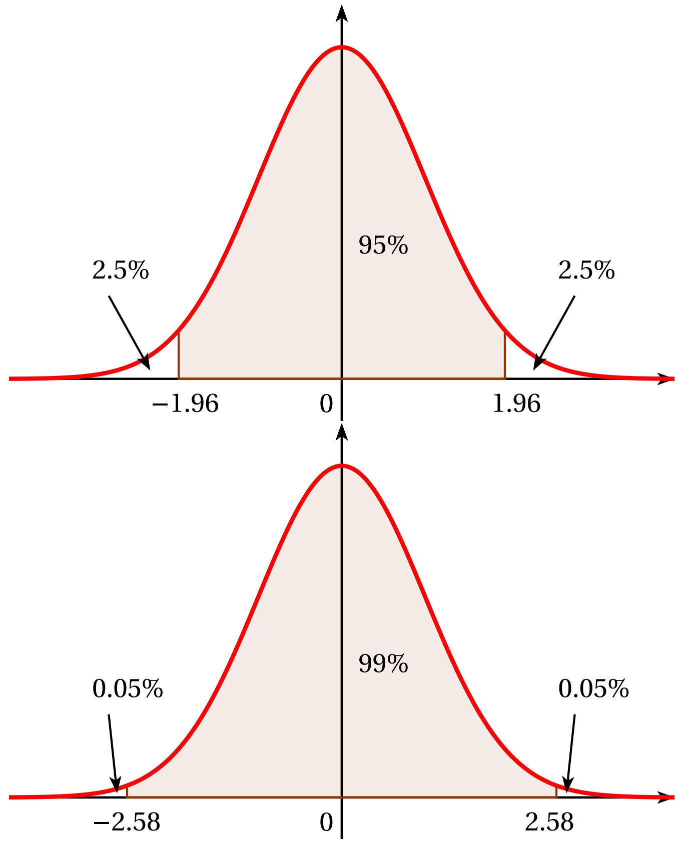
Corollaire 1.

Avec les notations précédentes, on retiendra deux valeurs : $u_{0.05} \simeq 1.96$ et $u_{0.01} \simeq 2.58$.
Ainsi, $\boxed{P(-1.96 \le X \le 1.96) \simeq 0.95}$ et $\boxed{P(-2.58 \le X \le 2.58) \simeq 0.99}$

Remarque : Cela donne une idée de la répartition :

⇝ Environ 95% des réalisations de X sont entre -1.96 et 1.96.

⇝ Environ 99% des réalisations de X sont entre -2.58 et 2.58.



V. La loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$

V.1. Définition

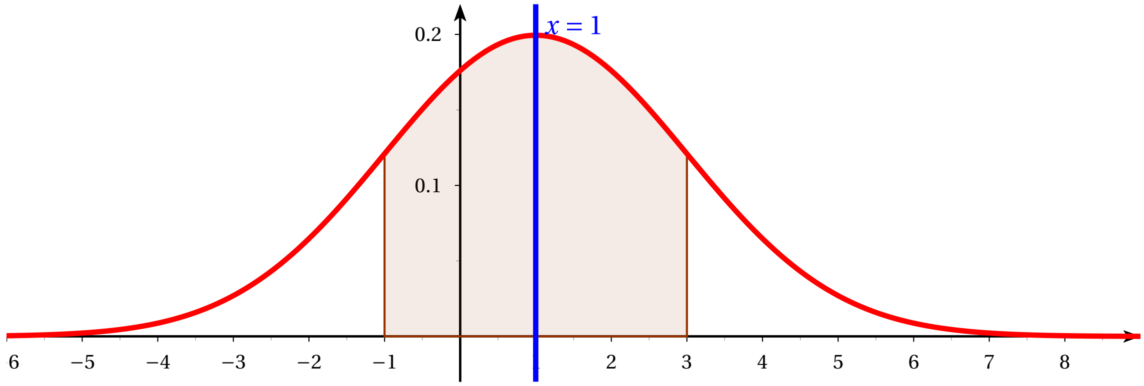
Définition 9.

Soient un réel μ et un réel strictement positif σ.
On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ si la variable aléatoire $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

Remarque : Dans la pratique, grâce au théorème de Moivre-Laplace, on approxime une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ par une loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ avec $\mu = np$ et $\sigma^2 = np(1-p)$.
On considère que l'approximation est satisfaisante dès que $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$.

Exemple :

Loi normale $\mathcal{N}(1,4)$ **:** $\mu = 1$ **et** $\sigma = 2$



Propriété 4.

Soit une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. On a :

$$E(X) = \mu \quad , \quad V(X) = \sigma^2 \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \sigma$$

Preuve

Par définition, $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$. On a donc

$$E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = 0 \iff \frac{1}{\sigma}\left(E(X)-\mu\right) = 0 \iff E(X)-\mu = 0 \iff E(X) = \mu$$

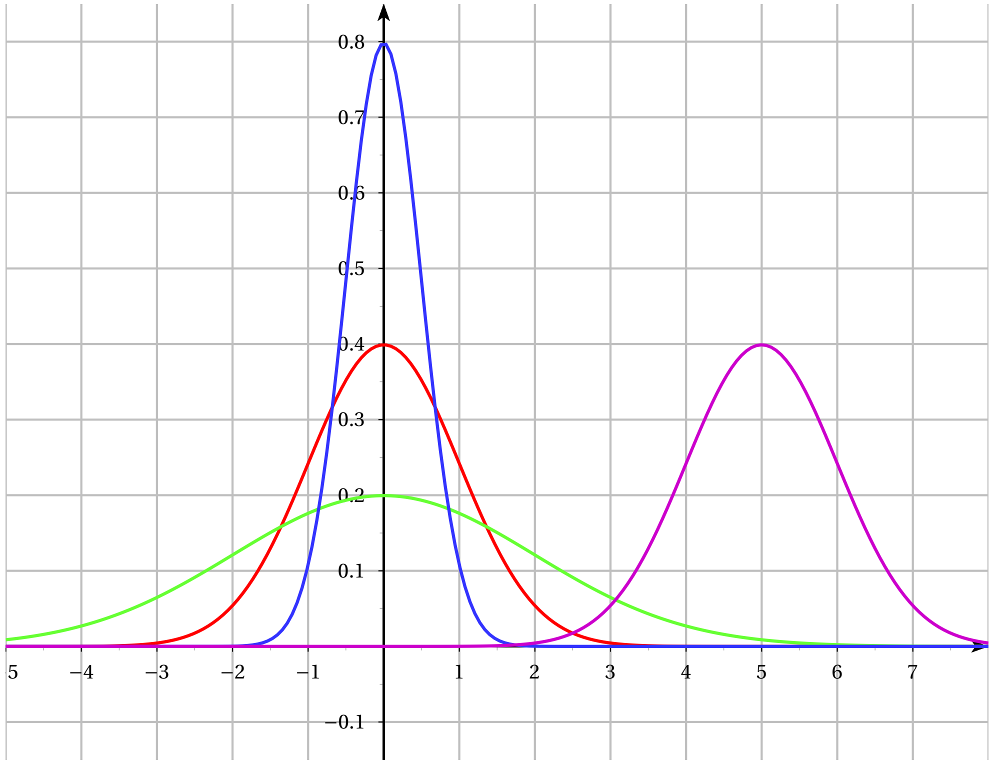
De même,

$$V\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = 1 \iff \frac{1}{\sigma^2}V(X) = 1 \iff V(X) = \sigma^2 \iff \sigma(X) = |\sigma| = \sigma$$

Remarques :

- μ est un paramètre de position et σ un paramètre de dispersion.
- La densité de la loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ est représentée par une courbe en cloche, dont l'axe de symétrie vertical est $x = \mu$.
  Plus σ est petit, et moins la dispersion est grande, donc plus la cloche est resserrée autour de son axe de symétrie.

Reconnaître les lois $\mathcal{N}(0,1)$, $\mathcal{N}(0,1/4)$, $\mathcal{N}(0,2)$ et $\mathcal{N}(5,1)$ parmi les quatre courbes représentées ci-dessous.



V.2. Méthodes de calcul

$X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Par exemple $X \hookrightarrow \mathcal{N}(1, 4)$

1. Calculer $P(a \leq X \leq b)$. Par exemple $P(-1 \leq X \leq 3)$.
   - ⇝ On se ramène à une loi normale centrée réduite en écrivant : $P(-1 \leq X \leq 3) = P(-2 \leq X-1 \leq 2) = P\left(-1 \leq \dfrac{X-1}{2} \leq 1\right) = P(-1 \leq Z \leq 1)$ où $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.
     A la calculatrice, on trouve $P(-1 \leq X \leq 3) \simeq 0.683$.
   - ⇝ Ou alors on calcule directement cette valeur sur la calculatrice en rajoutant les paramètres μ et σ aux commandes déjà connues.
2. Déterminer α tel que $P(X \leq \alpha) = p$, avec p donné appartenant à $[0;1]$.
   Par exemple, on cherche α tel que $P(X \leq \alpha) = 0.9$.
   - ⇝ On se ramène à une loi normale centrée réduite en écrivant : $P(X \leq \alpha) = P(\leq X-1 \leq \alpha-1) = P\left(\dfrac{X-1}{2} \leq \dfrac{\alpha-1}{2}\right) = P(Z \leq \beta)$ où $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et $\beta = \dfrac{\alpha-1}{2}$.
     A la calculatrice, on trouve $\beta \simeq 1.28$ donc $\alpha \simeq 3.56$.
   - ⇝ Ou alors on trouve directement α sur la calculatrice en rajoutant les paramètres μ et σ aux commandes déjà connues.

Attention !

Les calculatrices demandent μ et σ en arguments, et non σ^2.
Si on ne les précise pas, elle considère que $\mu = 0$ et $\sigma = 1$ (donc elle fait les calculs pour une loi normale centrée réduite).

Exemple :

La masse en kg des nouveaux nés à la naissance est une variable aléatoire qui peut-être modélisée par une loi normale[a] de moyenne $\mu = 3.3$ et d'écart-type $\sigma = 0.5$.

1. Déterminer $P(X < 2.5)$ en vous ramenant à une loi normale centrée réduite.
   Retrouver $P(X < 2.5)$ en utlisant la symétrie de la courbe représentative de la densité de la loi $\mathcal{N}(3.3, 0.5)$.

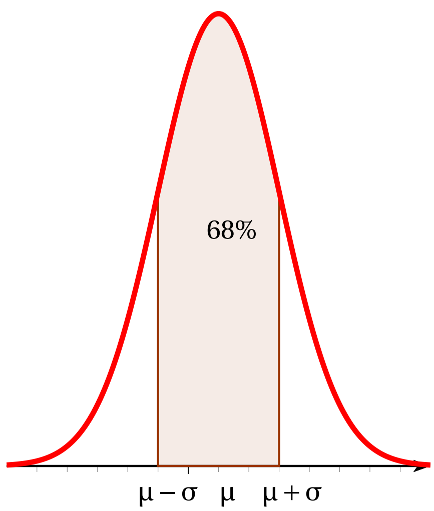
a. Le poids d'un nouveau né ne prend pas de valeurs négatives ni trop grandes, mais on peut vérifier que $P(X < 0)$ et $P(X > 5)$ sont négligeable.

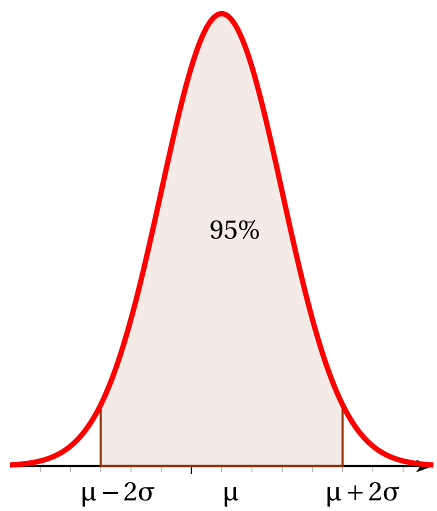
V.3. Répartition de l'aire sous la courbe

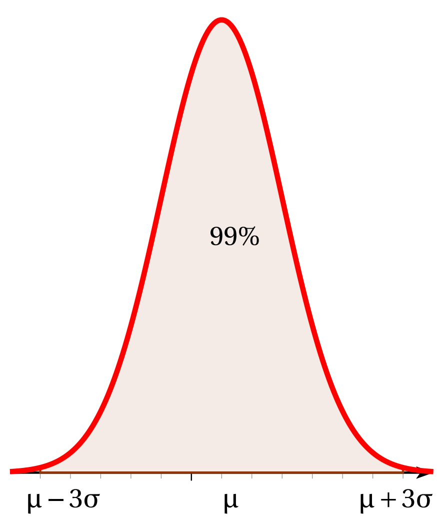
Propriété 5.

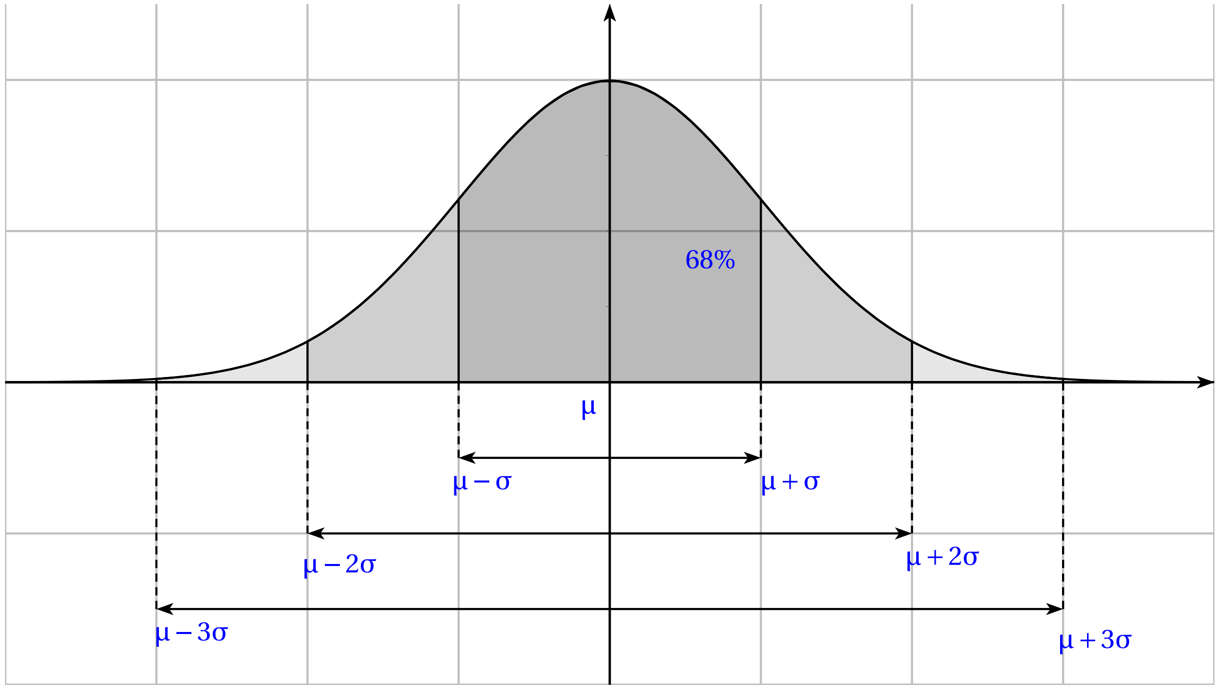
Soit une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. On a :

- $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \simeq 0.683$
- $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \simeq 0.954$
- $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \simeq 0.997$









Preuve

$$P(\mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma) = P(-\sigma \leq X-\mu \leq \sigma) = P\left(-1 \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq 1\right) \simeq 0.683$$

car $\frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
De même pour les autres approximations.

Exemple :

Une compagnie d'empaquetage de jus possède un équipement versant une quantité X de jus dans chacune des bouteilles de format 1000 ml. Cette quantité peut varier un peu d'une bouteille à l'autre.
On considère alors que X suit une loi normale de paramètre μ et $\sigma^2 = 25$ ml^2 et on appelle Z la variable aléatoire $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$.

1. Dans un premier temps, on considère $\mu = 1000$.
   (a) Déterminer la probabilité qu'une bouteille contiennent moins de 1000 ml.
   (b) Déterminer l'intervalle dans lequel se situe 99% de la production.
2. Reprendre les deux questions précédentes avec $\mu = 1005$ ml.
3. La législation impose qu'il y ait moins de 1% des bouteilles contiennent moins de 1000 ml.
   (a) Déterminer μ pour que l'embouteilleur respecte la législation et interpréter.
   (b) La contenance des bouteilles étant de 1020 ml, quelle est la probabilité qu'une bouteille déborde lors du remplissage ?
   (c) Un inspecteur choisit un échantillon de 20 bouteilles, au hasard et avec remise, parmi la production de la journée.
   L'embouteilleur recevra une amende si l'inspecteur trouve au moins une bouteille contenant moins de 1000 ml.
   On appelle Y la variable aléatoire qui compte le nombre de bouteilles dans l'échantillon qui contiennent moins de 1000 ml. Quelle est la probabilité que l'embouteilleur reçoive une amende ?

Solutions :

1. (a) Par symétrie de la courbe, on sait que $P(X \leq 1000) = \frac{1}{2}$
   (b) On sait que
   (c) $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \simeq 0.99$ donc $X \in [985; 1015]$
2. (a) On a $P(X \leq 1000) = 0.5 - P(1000 \leq X \leq 1005) = 0.5 - \frac{1}{2}P(1000 \leq X \leq 1010) \simeq 0.5 - \frac{1}{2}0.683 = 0.1585$
   Ou encore, à la calculatrice, en calculant $P(1000 \leq X \leq 1005)$, on trouve environ 0.1587, donc presque pareil.
   (b) On sait que $X \in [1005 - 15; 1005 + 15]$ ie $X \in [990; 1020]$ dans 99% des cas.
3. (a) On sait que Z suit une loi normale $\mathcal{N}(0;1)$. On cherche alors μ tel que

$$P(X \leq 1000) = 0.01 \iff P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{1000-\mu}{\sigma}\right) = 0.01 \iff P\left(Z \leq \frac{1000-\mu}{5}\right) = 0.01$$

   On cherche donc α tel que $P(Z \leq \alpha) = 0.01$.
   Grâce à la calculatrice, on trouve $\alpha \simeq -2.326$. Ainsi

$$\frac{1000-\mu}{5} \simeq -2.326 \iff \mu \simeq 1011.632$$

   L'embouteilleur doit verser en moyenne 1012 ml par bouteille pour que environ 1% des bouteilles contiennent moins de 1000 ml.
   On peut vérifier en cherchant à la calculatrice α *tel que* $P(X \leq \alpha) = 0.01$ *pour la loi de* X.
   On doit évidemment trouver une valeur proche de 1000.
   (b) A la calculatrice, avec $\mu \simeq 1011.6$, on trouve $P(X > 1020) = 0.5 - P(1011.6 < X < 1020) \simeq 0.046$.
   (c) On répète 20 fois de manière identique et indépendante, l'épreuve de Bernoulli qui consiste à choisir une bouteille, le succès étant « la bouteille contient moins de 1000 ml », de probabilité 0.01 d'après ce qui précède.
   Y compte le nombre de succès, donc Y suit une loi binomiale de paramètres 20 et 0.01.
   On cherche $P(Y \leq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0.99^{2}0 \simeq 0.18$
   La probabilité que l'embouteilleur reçoive une amende est de 0.18.