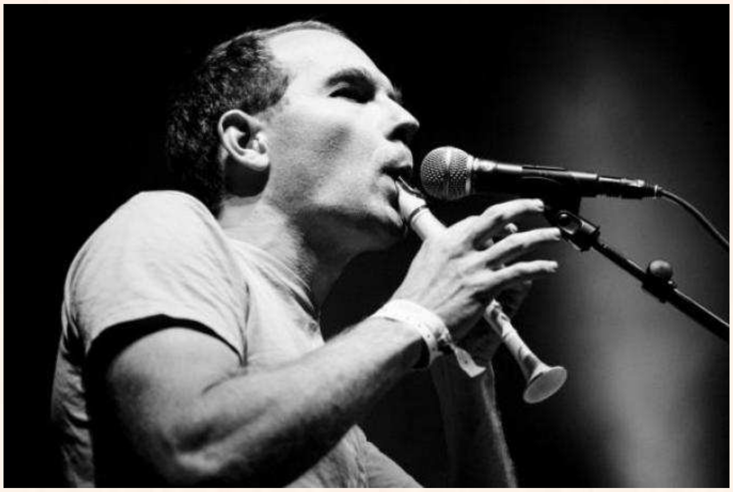
Chapitre 2

Géométrie dans l'espace



Hors Sujet

Titre : « Swim »
Auteur : CARIBOU
Présentation succinte de l'auteur : Depuis ses débuts sous le nom de Manitoba, le canadien Dan Snaith n'en finit plus de sonder en profondeur l'électro-pop. Passé l'expérience Manitoba, Dan s'est accaparé les commandes du groupe Caribou, déjà auteur de deux albums remarquables et dont le dernier exercice, Andorra, avait permis au groupe de véritablement exploser par la force d'un single trompeur, Melody Day. En effet, Caribou n'a jamais cherché à écrire la pop-song parfaite, celle que l'on se prend à fredonner dans la rue, le groupe préférant questionner en permanence la structure lacunaire couplet/refrain d'une chanson pop et montée/descente d'une piste électro.
Caribou atteint avec Swim un niveau insoupçonné d'homogénéité et semble parvenir à une sorte de plénitude. Swim se révèle plus sombre, mais jamais plombant, que ses prédécesseurs notamment sur l'électro 80's d'un Leave House chancelant et sur le fantastique Found Out dont les trois minutes d'électro-pop risquent fortement de parasiter durablement vos pensées par la force d'un thème d'une simplicité désarmante.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : D. Zancanaro
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jean Durand (Castelnaudary)

Table des matières

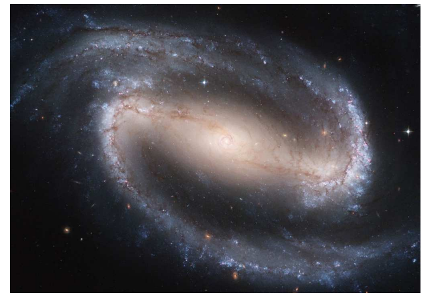
L'essentiel :

- $\rightsquigarrow$ Connaître les diverses positions relatives de l'espace
- $\rightsquigarrow$ Trouver des sections de cubes par un plan
- $\rightsquigarrow$ Utiliser les vecteurs dans l'espace
- $\rightsquigarrow$ Découvrir la représentation paramétrique d'une droite

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

Leçon 2

Géométrie dans l'espace



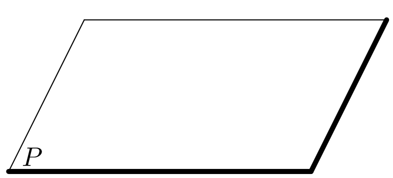
Résumé

Nous allons tenter à travers ce chapitre de nous familiariser avec ce que l'on appelle la dimension 3 : l'espace.
Une des plus grandes difficultés sera de parvenir à voir des figures spatiales, alors qu'elles sont tracées sur une feuille (donc dans un plan), c'est-à-dire en dimension 2.
Grâce aux vecteurs et à la géométrique analytique on pourra résoudre plus simplement des problèmes qui ont lieu dans l'espace.
L'élève curieux peut se demander si on peut aller plus loin dans les dimensions... En effet, durant la scolarité, on ne cesse d'augmenter le nombre de dimension, 1 avec les droites, 2 avec la géométrie plane et 3 avec l'espace. Et bien oui ! On peut définir des espaces de dimension 4, le plus connu étant l'espace-temps. Il devient difficile par contre de représenter de telles géométries...
On peut aussi se demander si la perspective cavalière est la seule manière de représenter l'espace. La réponse est non, en peinture il n'est pas rare de voir une autre manière de représenter l'espace : la perspective parallèle.

I. Généralités et rappel de seconde

I.1. Représentation dans l'espace et Axiomes

La géométrie élémentaire de l'espace est née du souci d'étudier les propriétés de l'espace dans lequel nous vivons. Les objets élémentaires de cette géométrie sont les points, les droites et les plans. On considère ces notions comme des notions premières, c'est-à-dire suffisamment familières pour ne pas les définir. Pour leur étude il sera nécessaire d'admettre un certain nombre de propriétés de base.
Un point désigne un endroit précis. On le représente par un point (.) ou une croix (×), et on lui donne un nom. Mais il faut bien comprendre qu'il ne s'agit que d'une représentation de l'objet théorique, "point", qui n'a pas d'étendue.
Une droite est un ensemble de points, qu'on représente par un "segment", et auquel on donne un nom. il faut bien comprendre qu'il ne s'agit que d'une représentation de l'objet théorique, "droite", qui n'a pas de largeur, et qui est illimité dans les deux sens.
Un plan est un ensemble de points. La feuille de papier est une bonne représentation d'un plan. Lorsque l'on veut représenter plusieurs plans de l'espace, on représente chacun d'entre eux par un parallélogramme, censé représenter un rectangle en "perspective". Il ne s'agit là que d'une représentation de l'objet théorique "plan" qui n'a pas d'épaisseur et illimité dans tous les sens.



Remarque : En mathématiques, le mot axiome désignait une proposition qui est évidente en soi dans la tradition mathématique grecque, comme dans les Éléments d'Euclide. L'axiome est utilisé désormais, en logique mathématique, pour désigner une vérité première, à l'intérieur d'une théorie. L'ensemble des axiomes d'une théorie est appelé axiomatique ou théorie axiomatique. Cette axiomatique doit être non-contradictoire ; c'est sa seule contrainte. Cette axiomatique définit la théorie ; ce qui signifie que l'axiome ne peut être remis en cause à l'intérieur de cette théorie, on dit alors que cette théorie est consistante. Un axiome représente donc plutôt un point de départ dans un système de logique et il peut être choisi arbitrairement. La pertinence d'une théorie dépend de la pertinence de ses axiomes et de son interprétation. En réalité, c'est de la non cohérence de son interprétation que vient la réfutation de la théorie non-contradictoire et, par voie de conséquence, de son axiomatique. L'axiome est donc à la logique mathématique, ce qu'est le postulat à la physique théorique.

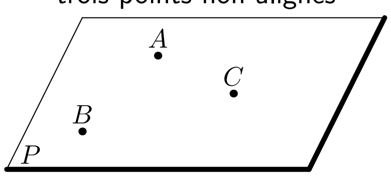
Les axiomes d'incidence de la géométrie dans l'espace sont des axiomes qui fournissent des relations entre les points, les droites et les plans de cette géométrie.

1. Par deux points distincts de l'espace il passe une et une seule droite. Cette droite peut-être notée (AB).
2. Par trois points non alignés, A, B et C passe un et un seul plan. Ce plan peut-être noté (ABC).

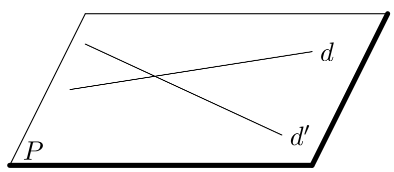
3. Si A et B sont deux points d'un plan P, tous les points de la droite (AB) appartiennent au plan.

Il en résulte qu'un plan peut être déterminé par l'une des conditions suivantes :

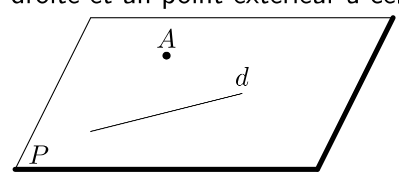
trois points non alignés



deux droites sécantes



une droite et un point extérieur à celle-ci



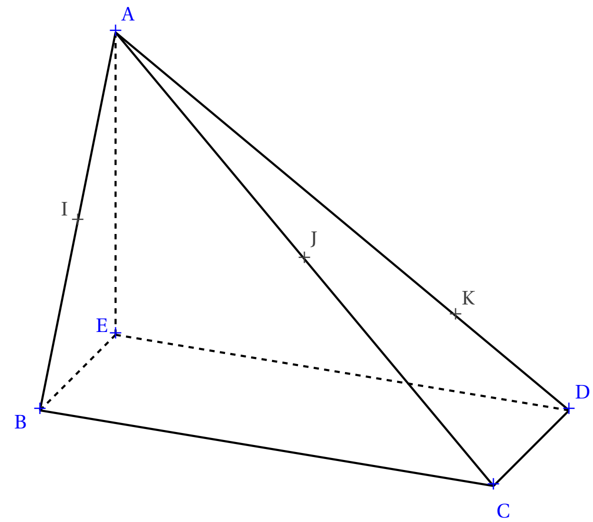
I.2. Positions relatives de droites et plans

Travail de l'élève : ABCDE est la pyramide ci-dessous, telle que sa base BCDE est un parallélogramme. I est le milieu de [AB] et J celui de [AC]. K est le point du segment [AD] tel que $AK = \frac{3}{4}AD$.

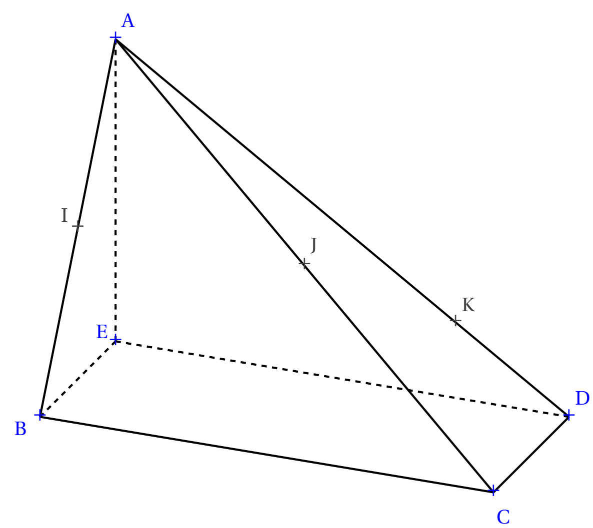
1. Déterminer la position relative et les intersections éventuelles
   (a) des droites :
   - ⇝ (IJ) et (BC)
   - ⇝ (JK) et (CD)
   - ⇝ (JK) et (BC)

   (b) de la droite et :
   - ⇝ (BC) et (ADE)
   - ⇝ (IJ) et (BCD)
   - ⇝ (JK) et (ACD)
   - ⇝ (JK) et (ADE)
   - ⇝ (JK) et (BCD)

   (c) des plans :
   - ⇝ (BCD) et (AIE)
   - ⇝ (IJK) et (ABC)
   - ⇝ (IJK) et (ADE)
   - ⇝ (ABC) et (ADE).



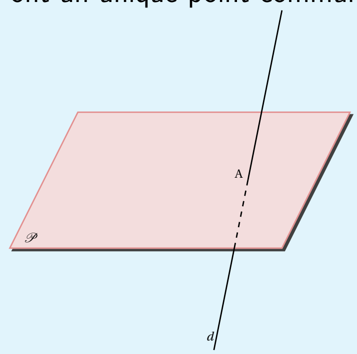
2. Grâce à certaines des questions précédentes, tracer la section du tétraèdre ABCDE par le plan (IJK) sur la figure ci-contre.



Une droite et un plan

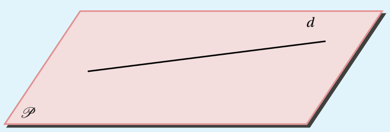
Soient d est une droite et P un plan de l'espace. Il n'existe que deux possibilités :

1. **La droite et le plan sont sécants.**
   Ils ont un unique point commun.

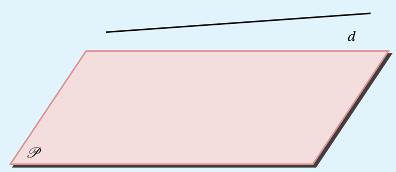


2. **La droite et le plan sont parallèles.**

   (a) **La droite est incluse dans le plan.**
   Ils ont une infinité de points communs.



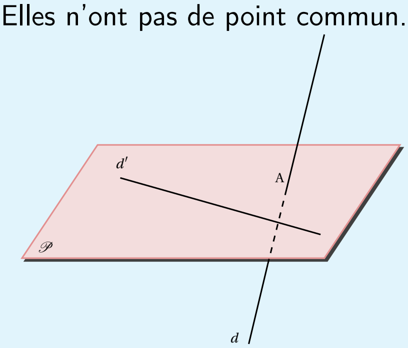
   (b) **La droite est strictement parallèle au plan.**
   Ils n'ont aucun point commun



Deux droites

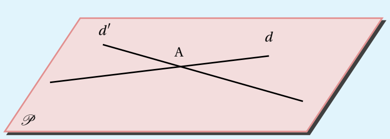
Soient d et d' deux droites de l'espace. Il n'existe que deux possibilités :

1. **Les droites sont non coplanaires.**
   Il n'existe aucun plan contenant ces deux droites.
   Elles n'ont pas de point commun.

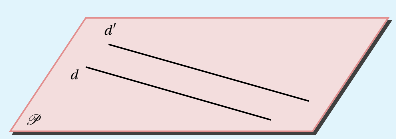


2. **Les droites sont coplanaires.**
   Il existe un plan contenant ces deux droites.

   (a) **Les droites sont sécantes.**
   Elles ont un unique point commun.



   (b) **Les droites sont parallèles.**
   Elles n'ont pas de point commun.



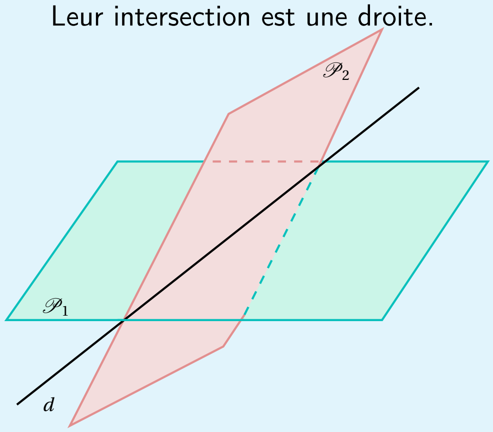
Remarque : Dans l'espace,

- ⇝ Deux droites sans points commun ne sont pas forcément parallèles ! Elles peuvent être non coplanaires.
- ⇝ Deux droites qui ne sont pas parallèles n'ont pas toujours de point commun ! Elles peuvent être non coplanaires.
- ⇝ Un plan est entièrement déterminé par deux droites sécantes.
- ⇝ Un plan est entièrement déterminé par deux droites strictement parallèles.

De deux plans

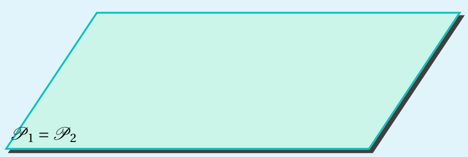
Soient $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ deux plans de l'espace. Il n'existe que deux possibilités :

1. **Les plans sont sécants.**
   Leur intersection est une droite.

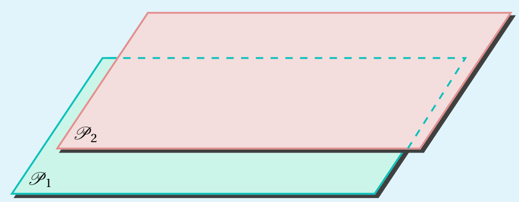


2. **Les plans sont parallèles.**

   (a) **Les plans sont confondus.**
   Ils ont une infinité de points communs.



   (b) **Les plans sont strictement parallèles.**
   Ils n'ont aucun point commun.



Remarque : Ainsi deux plans distincts qui dont on connait deux points communs sont sécants suivant la droite définie par ces deux points.

Exemple :

1. ABCD est un tétraèdre. Le point I est le milieu de [AB] et J est le point de [AD] tel que $AJ = \frac{2}{3}AD$.
   Déterminer l'intersection de la droite (IJ) et du plan (BCD).
2. ABCDEFGH est un cube. Les points I, J et K sont les milieux respectifs des arêtes [EF], [FB] et [FG].
   Déterminer l'intersection des plans (IJK) et (ABC).

Exemple :

En raisonnant dans un cube on trouve des exemples de chacun des cas précédents.

I.3. Application : section d'un solide par un plan

Exercice 1. On considère une pyramide SABCD dont la base ABCD est un parallélogramme.
Les points I et J sont définis par

$$\overrightarrow{SI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{SA} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{SJ} = \frac{4}{5}\overrightarrow{SB}$$

Enfin K est le milieu du segment [DC].
But : Construire la section du solide par le plan (IJK).

1. Représenter la situation en perspective cavalière.
2. Déterminer la position du point L d'intersection entre la droite (IJ) et le plan (ABC).
3. Représenter en rouge la section du plan (IJK) sur les faces SAB et ABCD.
4. On note H le point d'intersection entre le plan (IJK) et la droite (AD). Déterminer la position de H.
5. En déduire la section de la face SAD par le plan (IJK).
6. Terminer la construction de cette section.

Remarque : Pour tracer la section d'un solide par un plan, il faut déterminer et tracer les intersections de ce plan avec toutes les faces du solide.

Exercice 2. On considère un cube ABCDEFGH, I est le milieu de [AB], J celui de [BC] et K celui de [HG].
Déterminer la section de ce cube par le plan (IJK).

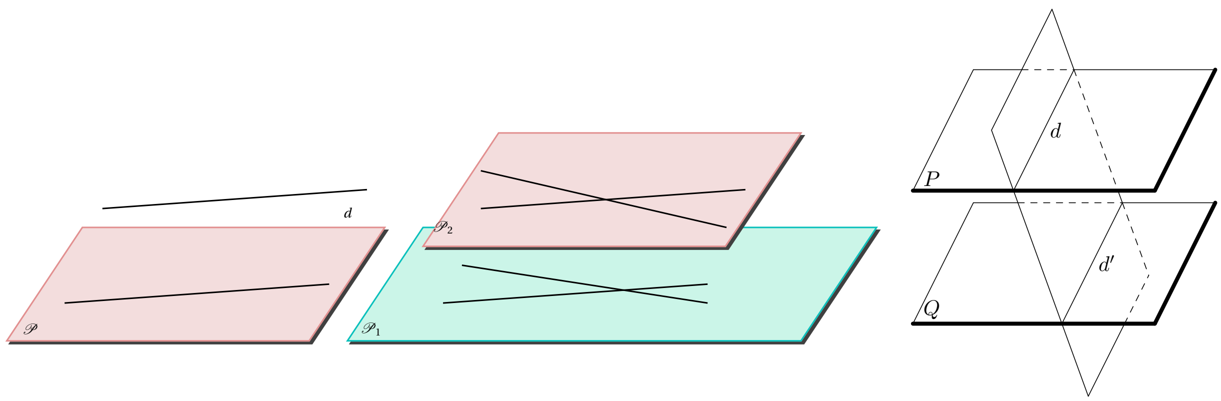
I.4. Parallélisme dans l'espace

I.4.a. Quelques propriétés

La liste des propriétés n'est pas exhaustive...certaines propriétés "évidentes" concernant le parallélisme dans l'espace n'apparaissent pas dans cette section. Rappelons les plus importantes :

Propriété 1.

- Une droite est parallèle à un plan si et seulement si elle est parallèle à une droite de ce plan.
- Deux plans sont parallèles si et seulement si il existe deux droites sécantes de l'un parallèles à deux droites sécantes de l'autre.
- Si P et Q sont deux plans parallèles, alors tout plan qui coupe P coupe aussi Q et les droites d'intersection sont parallèles.



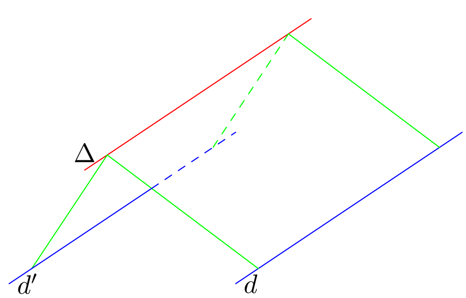
Preuve

Démontrons la troisième propriété.
Soient d et d' les droites d'intersection. Elles sont coplanaires, donc soit parallèles, soit sécantes. Or si elles sont sécantes en un point M alors M appartient à $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$. Mais on a supposé $\mathscr{P}$ e $\mathscr{Q}$ parallèles, nous aboutissons à une absurdité donc d et d' sont strictement parallèles.

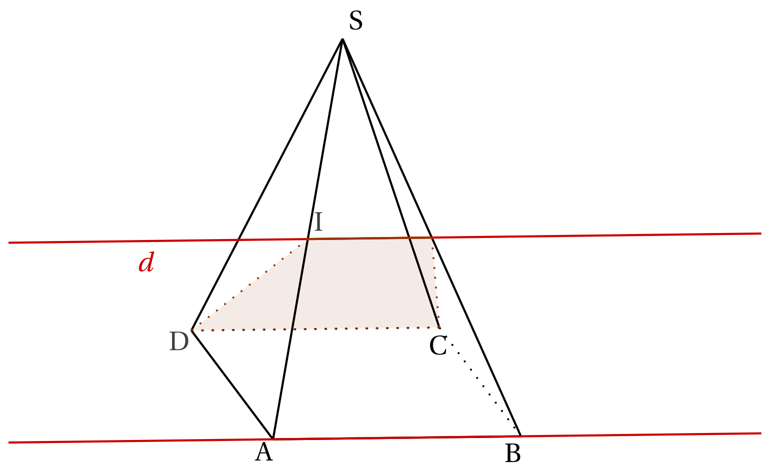
Théorème 1.

Théorème du toit

d et d' sont deux droites parallèles. P est un plan contenant d et P$'$ un plan contenant d'.
Si, en outre, les plans P et P$'$ sont sécants, alors la droite Δ d'intersection de ces plans est parallèle à d et d'.



Exercice 3. Soit SABCD une pyramide régulière de sommet S à base carrée. Soit I le milieu de l'arête [SA]. Le plan (CDI) coupe le plan (SAB) selon une droite d.
Démontrer que d est parallèle à (AB).



Solutions :

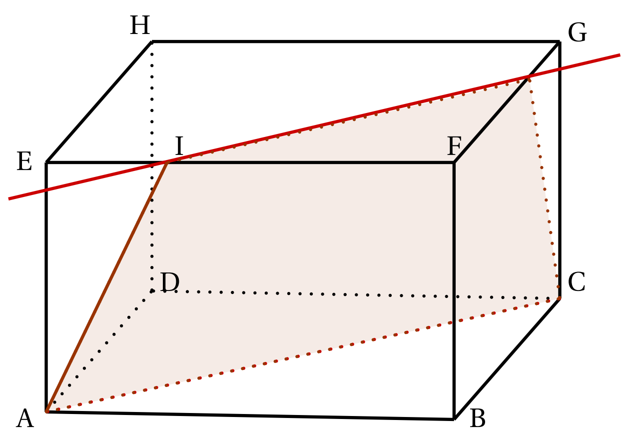
Les plans (CDI) et (SAB) sont sécants selon la droite d. Or le plan (CDI) contient la droite (CD) et le plan (SAB) contient la droite (AB), et les deux droites (AB) et (CD) sont parallèles (comme supports des côtés du carré de base de la pyramide). D'après le théorème du toit, la droite d est donc parallèle à la droite (AB).

I.4.b. Exercices d'applications

Exercice 4. Soit ABCDEFGH un pavé droit. Soit I un point de [EF]. Déterminer et tracer l'intersection des plans (EFG) et (ACI).

Solutions :

Les plans (ABC) et (EFG), qui contiennent les faces ABCD et AFGH du pavé, sont parallèles.
$I \in (ACI)$, mais $I \notin (ABC)$, donc les plans (ACI) et (ABC) ne sont pas confondus. Comme A et C sont deux points communs aux plans (ACI) et (ABC), on peut conclure que les plans (ABC) et (ACI) sont sécants selon la droite (AC).
On a donc $(ABC)//(EFG)$ et $(ACI)\cap(ABC) = (AC)$. On en déduit que le plan (ACI) coupe également le plan (EFG), selon une droite parallèle à (AC).
L'intersection de ces deux plans est donc la droite parallèle à (AC) passant par I.



Remarque : L'intersection se note à l'aide du symbole $\cap$. Ainsi si la droite d est l'intersection des plans P et Q, on note :

$$d = P \cap Q$$

Exercice 5. Soit ABCD un tétraèdre. Soit I, J et K les milieux respectifs des arêtes [AB], [BC] et [BD]. Démontrer que (IJK)//(ACD).

Exercice 6. SABCD est une pyramide dont la base ABCD est un trapèze.
Démontrer que la droite (CD) est parallèle au plan (SAB).

Solutions :

Le quadrilatère ABCD est un trapèze : les côtés [AB] et [CD] sont parallèles. Or les points A et B appartiennent au plan (SAB) : on a donc $(AB) \subset (SAB)$. Puisque la droite (CD) est parallèle à une droite du plan (SAB), on peut affirmer que la droite (CD) est parallèle au plan (SAB).

I.5. Sections d'un cube ou d'un parallélépipède par un plan

Tous les résultats énoncés dans cette partie seront admis et aucune démonstration ne sera présentée, de plus on s'intèresse au cas où l'intersection est non vide.

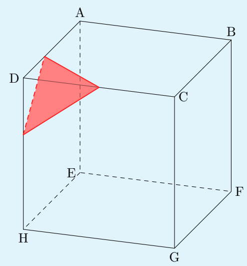
Pour trouver l'intersection d'un solide avec un plan $\mathscr{P}$, on cherche l'intersection de chacune des faces du solide avec le plan $\mathscr{P}$.
A chaque étape, on doit se poser les questions suivantes dans cet ordre :

- Connait-on deux points de $\mathscr{P}$ sur une même face du solide ?
  Dans ce cas, on les relie et on prolonge le segment jusqu'aux arêtes de la face concernée.
  On obtient deux nouveau points et on revient à la première question.
- Si l'on connait l'intersection de $\mathscr{P}$ avec une face du solide, connait-on un point de $\mathscr{P}$ sur l'éventuelle face du solide parallèle à la première ?
  Dans ce cas, on utilise la troisième propriété, et on trace la parallèle à l'intersection connue passant par le point connu. On s'arrête aux arêtes de la face concernée.
  On obtient deux nouveaux points et on revient à la première question.
- Si l'on n'est pas dans l'un des cas précédents, on doit construire un point à l'extérieur du solide, qui est commun à $\mathscr{P}$ et à l'un des plans portés par l'une des face du solide. Et cela devient très complexe à expliquer, donc mieux vaut avoir écouter en cours ...

Sections planes d'un cube

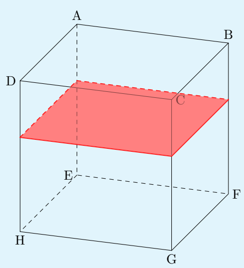
La section d'un cube par un plan $\mathscr{P}$ peut être de la nature suivante :

⇝ Un **triangle** (éventuellement réduit à un point) : on ne se pose que la première question

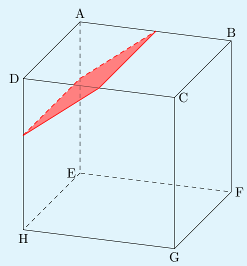


⇝ Un **quadrilatère** : on ne se pose les deux premières questions

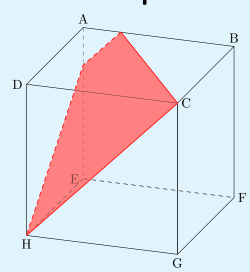
Un **Carré** lorsque $\mathscr{P}$ est parallèle à l'une des faces



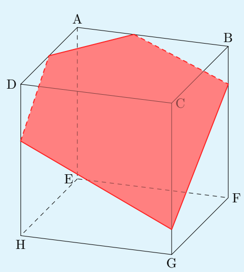
Un **Rectangle** (éventuellement un segment) lorsque $\mathscr{P}$ est parallèle à l'une des arêtes



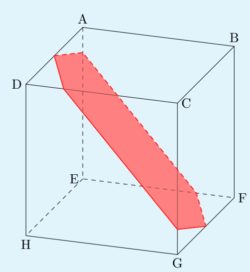
Un **trapèze**



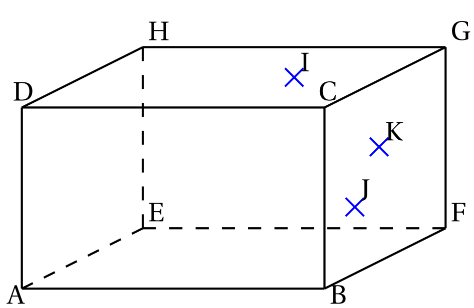
⇝ Un **pentagone** : on se pose les 3 questions



⇝ Un **hexagone** : on se pose les 3 questions

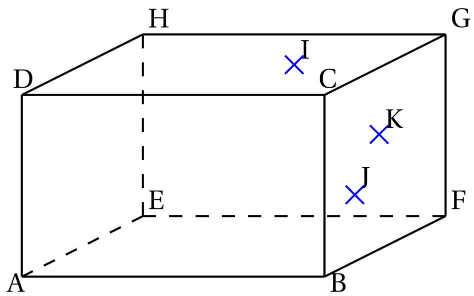


Exercice 7.



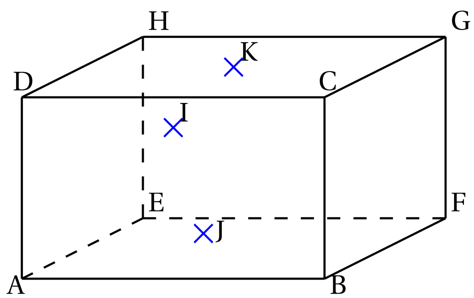
On considère le parallélépipède rectangle ABCDEFGH et les points I, J, K tels que J et K sont dans (BFG) et I ∈ (CDH), comme sur la figure ci-contre.
Dessiner la section du parallélépipède par le plan (IJK).

Exercice 8.



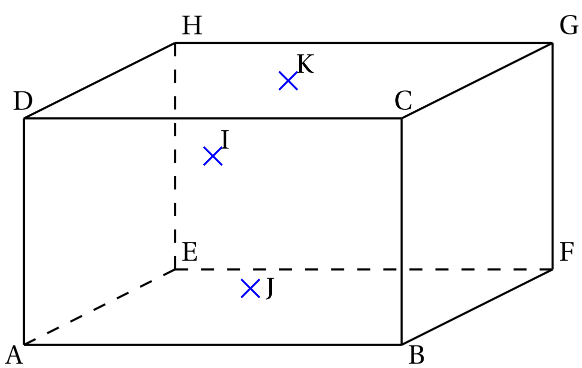
On considère le parallélépipède rectangle ABCDEFGH et les points I, J, K tels que J et K sont dans (EFG) et I ∈ (CDH), comme sur la figure ci-contre.
Dessiner la section du parallélépipède par le plan (IJK).

Exercice 9.



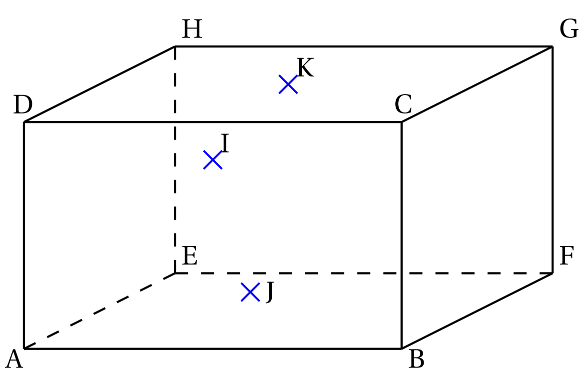
On considère le parallélépipède rectangle ABCDEFGH et les points I, J, K tels que I et J sont dans (ABC) et K ∈ (DCG), comme sur la figure ci-contre.
Dessiner la section du parallélépipède par le plan (IJK).

Exercice 10.



On considère le parallélépipède rectangle ABCDEFGH et les points I, J, K tels que I et J sont dans (ABC) et K ∈ (EFG), comme sur la figure ci-contre.
Dessiner la section du parallélépipède par le plan (IJK).

Exercice 11. (Pour les experts)

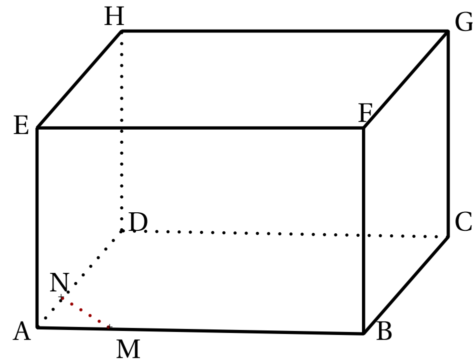


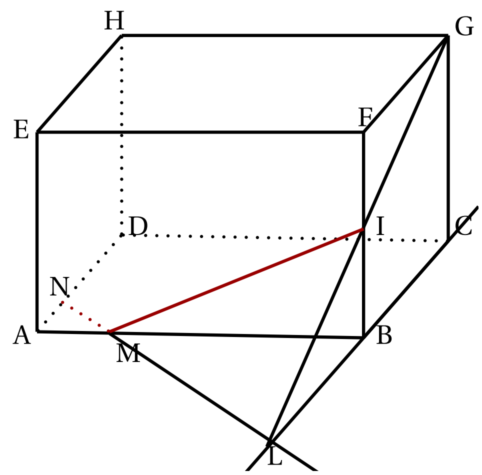
On considère le parallélépipède rectangle ABCDEFGH et les points I, J, K tels que I et K sont dans (EFG) et J ∈ (ABF), comme sur la figure ci-contre.
Dessiner la section du parallélépipède par le plan (IJK).

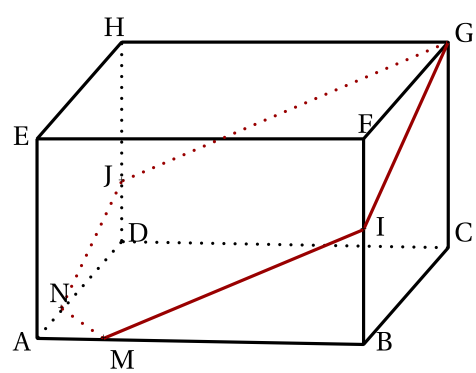
Exercice 12. Soit ABCDEFGH un pavé droit. Soit N et M deux points respectivement situés sur les arêtes [AD] et [AB]. Tracer la section du pavé ABCDEFGH par le plan (MNG).

Voici les différentes étapes :

1. **Trace du plan (MNG) sur la face ABCD**
   M et N sont deux points communs aux plans (ABC) et (MGN).
   L'intersection de ces deux plans est donc la droite (MN), et la trace du plan (MGN) sur la face ABCD est donc le segment [MN]. (en pointillés rouge sur la figure).
2. **Trace du plan (MNG) sur les faces BCGF et ABFE.**
   Le point G est commun aux plans (MNG) et (BCG). Il suffit de trouver un second point commun aux deux plans.
   $(MN) \subset (MGN)$ et $(BG) \subset (BCG)$ donc le point d'intersection de (MN) et (BC) appartient à la fois aux plans (MNG) et (BCG. Appelons L ce point. On en déduit que l'intersection des plans (MNG) et (BCG) est la droite (GL).
   Soit I le point d'intersection de (GL) et (BF) : les segments [GI] et [MI] sont les traces du plan (MNG) sur les faces BCGF et ABFE respectivement (en traits pleins rouge sur la figure).
3. **Traces du plan (MNG) sur les faces CGHD et ADHE**
   Les plans (ADH) et (BCG) sont parallèles. Le plan (MGN) coupe le plan (BCG) selon la droite (GI). On en déduit que (MGN) coupe (ADH) selon une droite parallèle à (GI).
   $N \in [AD] \subset (ADH)$ donc $N \in (ADH)$.
   De plus, par définition $N \in (MGN)$. N appartient donc à l'intersection des plans (MGN) et (ADH). On en déduit que l'intersection de ces deux plans est la droite parallèle à (GI) passant par N.
   Cette droite coupe l'arête [DH] en un point J : les segments [NJ] et [JG] sont donc les traces du plan (MNG) sur les faces ADHE et CGHD respectivement (en traits pointillés rouge sur la figure).
4. **Section du pavé ABCDEFGH par le plan (MGN).**
   La section du pavé par le plan (MGN) est donc le pentagone MIGJN.







II. Vecteurs dans l'espace

Travail de l'élève : ABCDEFGH est un cube. I est le milieu de l'arête [FG].

1. Déterminer le point M tel que :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FI}=\overrightarrow{AM}$$

2. Démontrer que

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CB}$$

La notion de vecteur vue en géométrie plane se généralise sans difficulté à l'espace. Ainsi, on étend à l'espace la définition de vecteur dans un plan, et les opérations associées : multiplication par un réel, somme de vecteurs. La relation de Chasles est toujours valable.

II.1. Vecteurs colinéaires, parallélisme et alignement

Définition 1.

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **colinéaires** lorsqu'ils ont la même direction.

Théorème 2.

Les vecteurs non nuls, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$.

Remarque : Par convention, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur $\vec{u}$.

Conséquences

La colinéarité est utile pour démontrer que :

- deux droites sont parallèles :

$$\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires} \iff \text{les droites (AB) et (CD) sont parallèles.}$$

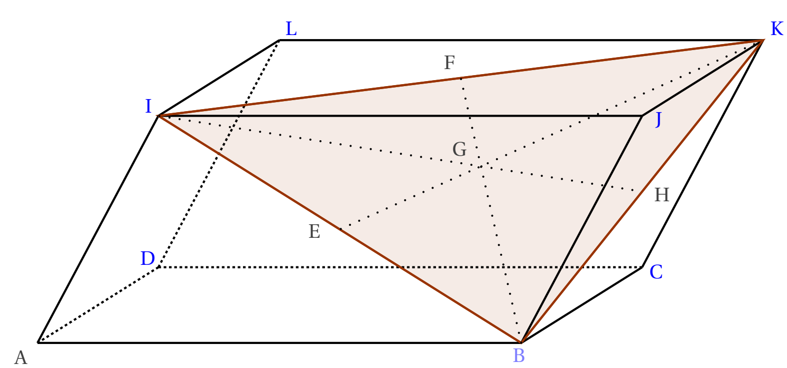
(On peut donc aussi en conclure que dans ce cas, les points A, B, C et D sont coplanaires)

- trois points sont alignés :

$$\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires} \iff \text{si A, B et C sont alignés.}$$

Exemple :

ABCDIJKL est un parallélépipède. G est le centre de gravité du triangle BIK. Démontrer que J, D et G sont alignés.



Solutions :
On constate que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{JD} &= \overrightarrow{JF}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BD}\\ &= \overrightarrow{JF}+3\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{JL}\\ &= \overrightarrow{JF}+3\overrightarrow{FG}+2\overrightarrow{JF}\\ &= 3\overrightarrow{JF}+3\overrightarrow{FG}\\ &= 3\overrightarrow{JG}\end{aligned}$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{JD}$ et $\overrightarrow{JF}$ sont colinéaires. Les points J, G, et D sont alignés.

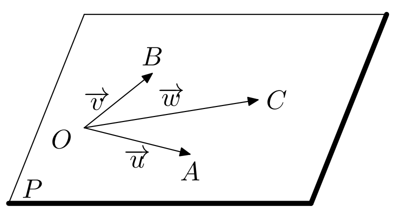
II.2. Vecteurs Coplanaires

Travail de l'élève : On considère un cube ABCDEFGH.

1. Les droites (AE), (CD) est (CH) sont-elles coplanaires ?
2. Pensez-vous que les vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CH}$ le soient ? Pourquoi ?
3. Peut-on exprimer le vecteur $\overrightarrow{AE}$ en fonction des $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CH}$? Dans l'affirmative, donner cette relation.
4. Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont coplanaires.
5. Peut-on exprimer le vecteur $\overrightarrow{AE}$ en fonction des $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BC}$? Dans l'affirmative, donner cette relation.
6. Peut-on trouver trois vecteurs non coplanaires ? Deux vecteurs ? Si oui, donner un exemple.
7. Est-il possible de décomposer le vecteur $\overrightarrow{AE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$? Pourquoi ?

Définition 2.

Des vecteurs sont dits **coplanaires** lorsque l'on peut trouver des représentants de ces vecteurs situées dans un même plan.



Remarque : Si A, B et C sont trois points non alignés d'un plan $\mathscr{P}$, on dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont des vecteurs directeurs du plan $\mathscr{P}$ **Remarques :**

- Deux vecteurs sont toujours coplanaires (car trois points le sont toujours).
- Attention, le fait qu'initialement les premiers représentants choisis ne soient pas dans un même plan n'empêche absolument pas les vecteurs d'être coplanaires. Cela signifie seulement que l'on n'a pas choisi les "bons" représentants. Par exemple, dans un cube, ABCDEFGH, les points A, B, C, G, et H ne sont pas coplanaires mais les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont coplanaires. Il suffit pour s'en apercevoir de changer de représentant pour le vecteur $\overrightarrow{GH}$ et prendre le vecteur $\overrightarrow{CD}$.
- En revanche, si on a utilisé 4 points seulement, pour écrire des représentants des trois vecteurs, les trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si les quatre points sont coplanaires.

Théorème 3.

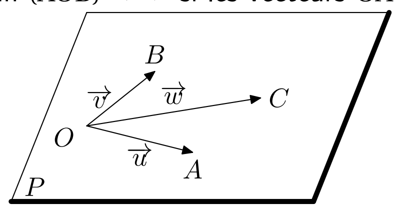
On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.
Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels x et y tels que :

$$\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$$

Remarque : La notion de vecteurs coplanaires est importante pour prouver :

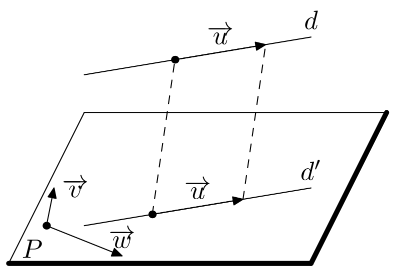
1. l'appartenance d'un point à un plan :

   le point C appartient au plan (AOB) $\iff$ si les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont coplanaires



2. le parallélisme d'une droite d de vecteur directeur $\vec{u}$ et d'un plan P de vecteurs directeurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$:

   la droite d est parallèle au plan P $\iff$ les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires.



Conséquences

- Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires
- Deux plans ayant un même couple de vecteurs directeurs sont parallèles (éventuellement confondus)
- Une droite $\mathscr{D}$ et un plan $\mathscr{P}$ sont parallèles si et seulement si un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est un vecteur du plan $\mathscr{P}$.

Exemple :

ABCDEFGH est un cube. I est le milieu de [EB] et J le milieu de [FG].
Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont coplanaires.

Solutions :

Il s'agit d'exprimer l'un des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BG}}$ ou $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ en fonction des deux autres. Ceux qui sont sur les faces du cube sont simples à visualiser. Par conséquent, essayons d'exprimer $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ en fonction des $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BG}}$.
Comme $\overrightarrow{\mathrm{BG}}$ est la diagonale d'une face, exprimons-le plutà´t en fonction de vecteurs sur des arêtes, et appuyons -nous sur le point F car il apparait dans $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ (avec une figure, il semble assez tordu de s'appuyer sur E). On a :

$$\overrightarrow{\mathrm{BG}}=\overrightarrow{\mathrm{BF}}+\overrightarrow{\mathrm{FG}}$$

Maintenant, considérons le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$, en s'appuyant sur le point F qui nous a déjà servi pour décomposer $\overrightarrow{\mathrm{BG}}$. On a :

$$\overrightarrow{\mathrm{IJ}}=\overrightarrow{\mathrm{IF}}+\overrightarrow{\mathrm{FJ}}$$

Utilisons désormais les arêtes du cube, toujours en s'appuyant sur F. On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{IJ}} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{EF}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BF}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{FG}}\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{EF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BG}}\end{aligned}$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BG}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ sont coplanaires.

Exercice 13. ABCD est un tétraèdre. Le point I est le milieu de [CD] et le point K est défini par $\overrightarrow{\mathrm{AK}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

1. Faire une figure et placer K.
2. Exprimer $\overrightarrow{\mathrm{BI}}$ puis $\overrightarrow{\mathrm{BK}}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$.
3. En déduire que les points B, K et I sont alignés.

Exercice 14. ABCDEFGH est un cube. M et L sont les points tels que $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{EL}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{EF}}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{\mathrm{ML}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{DB}}+\overrightarrow{\mathrm{DH}}$
2. En déduire la position de la droite (ML) par rapport au plan (DBH)

Exercice 15. ABCDEFGH est un cube. I, J et K sont les milieux respectifs de [AB], [CD] et [EF].

1. Démontrer que la droite (CK) est parallèle au plan (IJH)
2. Démontrer que les plans (IJH) et (BCK) sont parallèles

Exercice 16. SABCD est une pyramide à base carré ABCD. Le point O est le centre de ABCD.
J est le milieu de [SO]. Le point K est tel que $\overrightarrow{\mathrm{SK}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{SD}}$

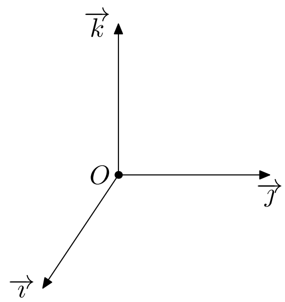
1. Justifier que S, B, D, O, J et K sont coplanaires.
2. (a) Démontrer que $\overrightarrow{\mathrm{BK}}=-\overrightarrow{\mathrm{SB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{SD}}$
   (b) Justifier que $\overrightarrow{\mathrm{SO}}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{SB}}+\overrightarrow{\mathrm{SD}}\right)$ et en déduire que $\overrightarrow{\mathrm{BJ}}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{SB}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{SD}}$
   (c) Montrer que B, J et K sont alignés.
3. Positions relatives de plans
   (a) Etudier la position relative du plan (BJC) avec le plan (ABC) et avec le plan (SCD).
   (b) Etudier la position relative des plans (BJC) et (SAD).
   (c) Construire la section de la pyramide SABCD par le plan (BJC). Ne pas justifier.

III. Repérage dans l'espace

III.1. Repère de l'espace

Définition 3.

Soient trois points O, I, J non alignés et K un point n'appartenant pas au plan (OIJ), autrement dit, soient O, I, J et K quatre points non coplanaires.
On dit que $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,; \vec{k}\,)$ (où $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$) est un repère de l'espace.



Remarque :

1. Le triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est appelé base des vecteurs de l'espace.
2. Si les droites (OI), (OJ) et (OK) sont deux à deux orthogonales et si $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=\|\vec{k}\|=1$ on dit que le repère $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,; \vec{k}\,)$ est orthonormée

Exemple :

On considère un cube ABCDEFGH. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AE}\right)$ est un repère de l'espace
2. $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\right)$ est un repère de l'espace
3. $\left(B\ ;\ \overrightarrow{BD}\ ;\ \overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BH}\right)$ est un repère de l'espace
4. $\left(A\ ;\ \overrightarrow{ED}\ ;\ \overrightarrow{HC}\ ;\ \overrightarrow{EC}\right)$ est un repère de l'espace

III.2. Coordonnées d'un point, d'un vecteur

Théorème 4. (Définition)

Dans un repère $(\text{O}; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,; \overrightarrow{k})$ de l'espace, pour tout point M il existe un unique triplet de nombres réels $(x; y; z)$ tel que

$$\overrightarrow{\text{OM}} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$$

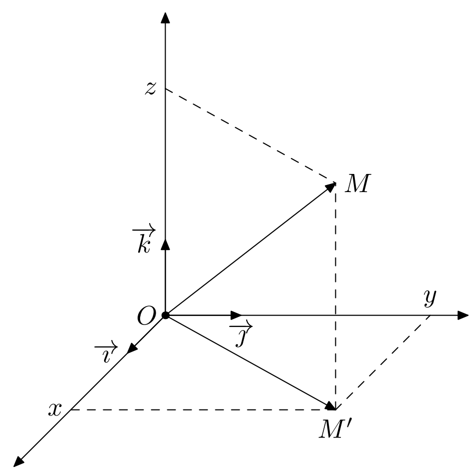
On appelle ce triplet les coordonnées de M, respectivement nommées *abscisse*, *ordonnée* et *côte* de M.

$(x; y; z)$ sont aussi les coordonnées du vecteurs $\overrightarrow{\text{OM}}$. On écrit souvent : $\overrightarrow{\text{OM}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

A tout $\vec{u}$ on associe l'unique point M tel que : $\overrightarrow{\text{OM}} = \vec{u}$.
Les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont alors les coordonnées du point M. Par conséquent, tout vecteur $\vec{u}$ s'écrit de manière unique :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

On note souvent $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$



III.3. Calculs sur les coordonnées

Tous les résultats de la géométrie plane concernant les coordonnées s'étendent à l'espace par l'adjonction d'une troisème coordonnée.

Théorème 5.

Soit un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace.

- Si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, alors :

$$\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda\vec{u}\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\\\lambda z\end{pmatrix}$$

- Si deux points A et B ont pour coordonnées $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ alors : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$
  - Le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées :
  $$I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$$
  - Si de plus C a pour coordonnées $C(x_C,y_C,z_C)$ alors le centre de gravité G du triangle ABC a pour coordonnées :
  $$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3};\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$$

  Dans les deux cas, on fait la moyenne des coordonnées des points concernés.

Preuve

A titre d'exemple, voici une démonstration d'une des propriétés ci-dessus (toutes se démontrent de la même manière ! !)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB} &= -\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\\ &= -x_A\vec{i}-y_A\vec{j}-z_A\vec{k}+x_B\vec{i}+y_B\vec{j}+z_B\vec{k}\\ &= (x_B-x_A)\vec{i}+(y_B-y_A)\vec{j}+(z_B-z_A)\vec{k}\end{aligned}$$

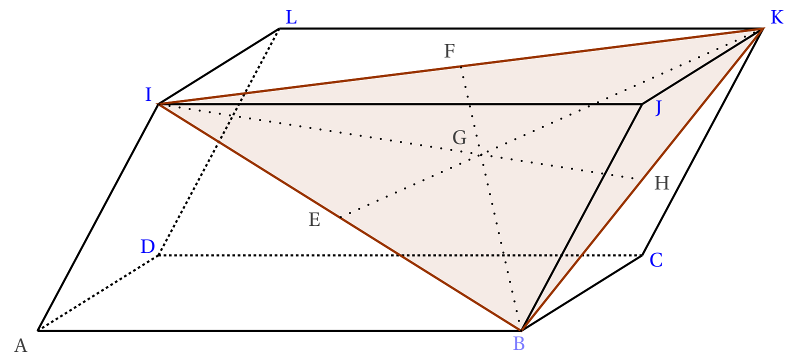
Par conséquent, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$

Exemple :

Un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ étant donné, on considère les points $A(1;2;-3)$, $B(-1;3;3)$ et $C(4;-1;2)$. D est un point tel que ABCD soit un parallélogramme, calculer les coordonnées de D, puis celles du centre I de ce parallélogramme.

Exemple :

ABCDIJKL est un parallélépipède. G est le centre de gravité du triangle BIK.
Démontrer, analytiquement, en choisissant un repère, que les points D, G et J sont alignés.



III.4. Application : Equation d'une sphère

On se place dans un repère orthonormal.

Théorème 6.

On considère un point $O(x_O;y_O;z_O)$ et un nombre réel $r>0$. L'équation de la sphère de centre O et de rayon r est alors :

$$(x-x_O)^2+(y-y_O)^2+(z-z_O)^2=r^2$$

Réciproquement toute équation de la cette forme est celle de la sphère de centre $O(x_O;y_O;z_O)$ et de rayon r.

Preuve

Un point $M(x;y;z)\in\mathscr{S}$ où $\mathscr{S}$ est la sphère de centre O et de rayon r si et seulement si :

$$OM=r \Longleftrightarrow OM^2=r^2 \Longleftrightarrow (x-x_O)^2+(y-y_O)^2+(z-z_O)^2=r^2$$

Exercice 17. Déterminer l'équation de la sphère de centre $A(1;2;3)$ et de rayon 4.

Exercice 18. Déterminer l'équation de la sphère de diamètre [AB] où $A(-2;3;-4)$ et $B(1;0;-6)$.

Exercice 19. On considère l'objet géométrique d'équation $2x+y-z=2$; démontrer qu'il s'agit d'une sphère et préciser son centre et son rayon.

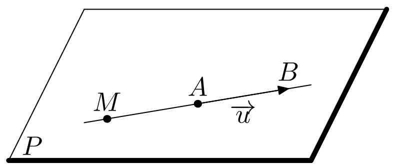
III.5. Représentations paramétriques d'une droite, d'un plan

III.5.a. Représentations paramétriques d'une droite

Théorème 7.

On considère A et B deux points distincts de l'espace. La droite (AB) est l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires i.e l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$, t étant un réel quelconque.

Remarque : On dit que $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).



Propriété 2. (Définition)

Dans un repère de l'espace on considère une droite $\mathscr{D}$ passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Un point $M(x, y, z)$ appartient à $\mathscr{D}$ si et seulement si il existe un réel t tel que : $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$

Ce système, lorsque t décrit $\mathbb{R}$ est appelé une **représentation paramétrique** de $\mathscr{D}$. Ainsi, $\mathscr{D}$ est l'ensemble des points M vérifiant de coordonnées $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Remarques :

- ce système dépend du paramètre t, d'où le nom
- Une représentation paramétrique est une condition nécessaire et suffisante sur les coordonnées d'un point permettant d'affirmer que ce point appartient à la droite ou qu'il n'y appartient pas.
- Une droite admet une infinité de représentations paramétriques, il suffit de choisir un autre point, ou un autre vecteur directeur pour en avoir une différente.

Preuve

On sait déjà que $M \in \mathscr{D} \iff \vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.
Ce qui équivaut à dire qu'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$. Or

$$\overrightarrow{AM} = t\vec{u} \iff \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$$

Exemple :

$\begin{cases} x = 4 - 5t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite d passant par le point $A(4;-2;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Le point obtenu en prenant $t = 0$ est le point A.
Celui en prenant $t = -1$ est $B(9;-4;-2)$. Il appartient à la droite d et on a $\overrightarrow{AB} = -\vec{u}$.
Soit le point $C(-6;2;7)$. Pour savoir s'il appartient à la droite d, on cherche t tel que l'on ait : $\begin{cases} x = 4 - 5t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$

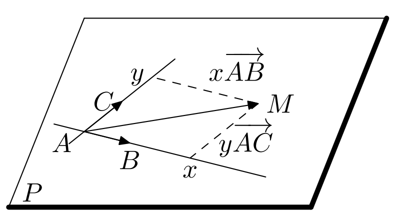
On constate que ce système a pour solution $t = 2$. Donc $C \in d$ et on a $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u}$.

III.5.b. Représentations paramétriques d'un plan

Théorème 8.

A, B et C sont trois points de l'espace non alignés.
Le plan (ABC) est l'ensemble des points M de l'espace définis par

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} \qquad x \text{ et } y \text{ étant des réels quelconques}$$



Preuve

$\Rightarrow$ Montrons que si $\mathrm{M} \in (\mathrm{ABC})$ alors $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = x\overrightarrow{\mathrm{AB}} + y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ $\quad x$ et y étant des réels quelconques
Comme A, B et C ne sont pas alignés, les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ne sont pas colinéaires et forment une base du plan (ABC) et donc $(\mathrm{A};\overrightarrow{\mathrm{AB}};\overrightarrow{\mathrm{AC}})$ est un repère du plan (ABC). Par conséquent, si M est un point du plan (ABC) il existe un unique couple de réels tel que :

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = x\overrightarrow{\mathrm{AB}} + y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$\Leftarrow$ Montrons que si $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = x\overrightarrow{\mathrm{AB}} + y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ $\quad x$ et y étant des réels quelconques alors $\mathrm{M} \in (\mathrm{ABC})$
Puisque, $(\mathrm{A};\overrightarrow{\mathrm{AB}};\overrightarrow{\mathrm{AC}})$ est un repère du plan (ABC), il existe dans ce plan un unique point N de coordonnées $(x;y)$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{AN}} = x\overrightarrow{\mathrm{AB}} + y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, d'où $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \overrightarrow{\mathrm{AN}} \Longleftrightarrow \mathrm{M} = \mathrm{N}$, on a donc

$$\mathrm{M} \in (\mathrm{ABC})$$

Exercice 20. Démontrons par l'absurde le théorème du toit vu en seconde et rappeler cette année. On rappelle que l'on considère deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sécants selon une droite Δ. De plus, on sait qu'une droite d de $\mathscr{P}$ est parallèle à une droite d' de $\mathscr{P}'$. Pour raisonner par l'absurde, on suppose de plus que Δ n'est pas parallèle à d et d'.
On désigne par $\vec{u}$ un vecteur directeur de Δ.

1. Expliquer pourquoi ce vecteur $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de $\mathscr{P}$ et de $\mathscr{P}'$.
2. Expliquer pourquoi il existe un vecteur $\vec{v}$ non nul directeur de d et d'.
3. Expliquer pourquoi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
4. Expliquer pourquoi ce vecteur $\vec{v}$ est aussi un vecteur directeur de $\mathscr{P}$ et de $\mathscr{P}'$.
5. En déduire une contradiction et conclure.

Propriété 3.

Dans l'espace muni d'un repère, on considère un plan $\mathscr{P}$ passant par $\mathrm{A}(x_\mathrm{A};y_\mathrm{A};z_\mathrm{A})$ dirigé par les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$. En raisonnant de même que pour une droite, on peut dire qu'un point M appartient à $\mathscr{P}$ si et seulement si il existe deux réels t et t' tels que $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = t\vec{u} + t'\vec{v} \Longleftrightarrow$
$$\begin{cases} x = x_\mathrm{A} + at + a't' \\ y = y_\mathrm{A} + bt + b't' \\ z = z_\mathrm{A} + ct + c't' \end{cases}$$
Ce système, lorsque t et t' décrivent $\mathbb{R}$, est appelé représentation paramétrique du plan $\mathscr{P}$

Exercice 21. Dans un repère de l'espace, on considère les points $\mathrm{E}(2;-3;5)$, $\mathrm{F}(0;-1;1)$, $\mathrm{H}(1;-8;8)$ et la droite d'équation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 - t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que d et (EF) sont strictement parallèles.
2. Montrer que d et (EH) sont sécantes et préciser leur point d'intersection K.