

Chapitre 8

Les nombres complexes



Hors Sujet



Titre : « Yeezus »

Auteur : KANYE WEST

Présentation succincte de l'auteur : Kanye Omari West voit le jour dans la ville d'Atlanta le 8 juin 1977, grandit à Chicago, Illinois et suit ses études à l'International Academy of Art and Design and Technology, une école d'art basée à Chicago et à l'Université de Chicago, mais abandonne par deux fois et ne passera jamais les examens.

Son père, Ray West, est un ancien membre des Black Panthers ; sa mère, Donda, était professeur d'anglais à l'université de Chicago quand Kanye West était jeune.

Selon USA Today : « Personne ne peut dire que West ne nous a pas prévenus. Son nouvel album, Yeezus est aussi sombre et abrasif comme les deux premières chansons qu'il a lâchés (New Slaves et Black Skinhead). C'est aussi audacieux et infectieux comme quelque chose qu'il a fait, et demande à être entendu avec haut-parleurs sur le souffle. Caisses électroniques Stark, rejets des lignes de conduite dancehall et lignes de basses menaçantes sous-tendent ses coups de gueule sur la race blanche, le sexe, le mercantilisme et la célébrité. Il vous défie presque de laisser vagabonder votre attention, jetant au hasard, dans le tempo de déplacement des échantillons et des cris gutturaux juste quand vous pensez que vous savez où il se dirige. »

Document réalisé à l'aide de \LaTeX

Auteur : D. Zancanaro

Site : wicky-math.fr.nf

Lycée : Jean Durand (Castelnaudary)

Table des matières

I. Introduction	1
I.1. Approche historique	1
I.2. Un Film Mathématique	1
I.3. Approche ensembliste	2
I.4. Elément d'histoire	2
II. Construction du corps des nombres complexes	2
II.1. Approche dimensionnelle	2
II.2. Forme algébrique d'un nombre complexe et opérations	4
III. Le plan complexe et le conjugué	7
III.1. Définition	7
III.2. Conjugué d'un nombre complexe.	8
III.3. Premiers calculs géométriques	10
IV. Equations du second degré à coefficients réels	12
IV.1. Equations du type $x^2 = a$ où $a \in \mathbb{R}$	12
IV.2. Equations du type $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$	13
V. Module et argument d'un nombre complexe	15
V.1. Module	15
V.2. Argument d'un nombre complexe	17
V.3. Forme Exponentielle	19
V.4. Interprétation géométrique	22
V.4.a. Calculs de distances	22
V.4.b. Calculs d'angles	22
V.4.c. Caractérisation des principaux objets géométriques	25
V.4.c.i. Le cercle	25
V.4.c.ii. Triangle Isocèle	25
V.4.c.iii. Triangle rectangle	25
V.4.c.iv. Interprétation graphique du quotient $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$	26
V.5. Formules de Moivre. Formules d'Euler (Hors Programme)	27

L'essentiel :

- ↪ Découvrir une nouvelle fonction de référence
- ↪ Connaître ses propriétés

« Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous »
 THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

Leçon 8

Les nombres complexes



Résumé

Les nombres complexes portent bien leur nom ! Ils interviennent partout : en algèbre, en analyse, en géométrie, en électronique, en traitement du signal, en musique, etc. Et en plus, ils n'ont jamais la même apparence : tantôt sous forme algébrique, tantôt sous forme trigonométrique, tantôt sous forme exponentielle, ... Leur succès vient en fait de deux propriétés : en travaillant sur les nombres complexes, tout polynôme admet un nombre de racines égal à son degré et surtout ils permettent de calculer facilement en dimension 2. Ce n'est pas clair ? Alors détaillons !

I. Introduction

I.1. Approche historique



Au début du XVI^{ème} siècle, le mathématicien Scipione dal Ferro, propose une formule donnant une solution aux équations du 3^{ème} degré de la forme $x^3 + px = q$:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q - \sqrt{q^2 + 4p^3/27}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{q + \sqrt{q^2 + 4p^3/27}}{2}}$$

A la fin de ce siècle, Bombelli applique cette formule à l'équation $x^3 - 15x = 4$

Il obtient littéralement :

$$x = \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}}$$

Cette écriture pose un problème majeur puisqu'elle amène à considérer le nombre $\sqrt{-1}$ qui n'a encore aucun sens. Néanmoins, Bombelli va plus plus loin, il remarque en utilisant les règles de calcul usuelles que :

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + 11\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad (2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - 11\sqrt{-1}$$

Par conséquent, il obtient : $x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$.

Or, $x = 4$ est bien une solution de l'équation $x^3 - 15x = 4$. Une question naturelle s'est alors posée : peut-on légitimement calculer avec des symboles imaginaires comme ci-dessus ? C'est ainsi qu'est née la théorie des nombres complexes ...

I.2. Un Film Mathématique

Observons le petit film mathématique suivant en guise d'introduction au nombre complexe. Il est tiré d'un film en 9 chapitres appelé dimension.

Dimension - Chapitre 5

I.3. Approche ensembliste

L'équation $x + 1 = 0$ n'a pas de solution dans \mathbb{N} , mais elle admet une solution -1 dans un ensemble plus grand \mathbb{Z} .

De même, l'équation $3x = 1$ n'admet pas de solution dans \mathbb{Z} , mais elle admet $\frac{1}{3}$ comme solution dans l'ensemble \mathbb{Q} plus vaste que \mathbb{Z}

Et puis, l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans \mathbb{Q} ; il faut chercher dans \mathbb{R} pour en trouver.

En clair, quand une équation n'a pas de solutions, une démarche naturelle (et historique) pour en trouver consiste à en chercher dans un ensemble plus grand. Au stade de nos connaissances, l'ensemble numérique le plus grand est \mathbb{R} . Pourtant l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solutions dans \mathbb{R} ...

On va donc, dans ce chapitre « construire ? » enfin plutôt imaginer un ensemble plus grand que \mathbb{R} dans lequel l'équation $x^2 + 1 = 0$ possède des solutions. On l'appellera \mathbb{C} : ensemble des nombres complexes. Le principal élément de \mathbb{C} sera noté i (i comme imaginaire) et vérifiera $i^2 = -1$. L'équation précédente possédera alors deux solutions :

$$x^2 + 1 = 0 \iff (x + i)(x - i) = 0 \iff x = i \text{ ou } x = -i$$

Je vous rassure tout de même, il n'existe pas d'ensemble plus grand que \mathbb{C} permettant de résoudre des équations polynômiales.

I.4. Élément d'histoire

En 1637, Descartes propose l'appellation de « nombres imaginaires », mais c'est Gauss en 1831 qui le premier les nomme les « nombres complexes ».

Euler, déclarant que la notation $\sqrt{-1}$ est absurde car elle conduit à une contradiction de la définition, introduit la notation i (comme imaginaire) en 1777 pour le nombre qui vérifie $i^2 = -1$.

L'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} apparaît alors : ce sont les nombres de la forme $a + ib$, avec a et b réels. Les règles de calculs dans \mathbb{R} sont conservées.

Les nombres imaginaires prennent alors leur statut officiel de nombres, avec notamment une représentation géométrique de chaque nombre $x + iy$ avec x et y réels par le point du plan de coordonnées $(x; y)$.

Ils ont notamment servi pour formaliser la théorie de la relativité d'Einstein (1905). A notre niveau, ils sont utiles en géométrie et pour la résolution toutes les équations.

II. Construction du corps des nombres complexes

II.1. Approche dimensionnelle

Vous savez « compter en dimension 1 », c'est-à-dire additionner et multiplier des nombres réels. Faute d'outils plus rigoureux¹ on vous a présenté l'ensemble des nombres réels comme étant les abscisses des points d'une droite graduée.

Vous utilisez depuis l'école primaire ces nombres et les opérations usuelles qui leur sont associées, addition et multiplication sans trop vous poser de questions. Ces opérations vérifient les propriétés suivantes² :

↪ L'addition possède un élément neutre noté 0 : $x + 0 = 0 + x = x$

↪ La somme de deux réels est encore un réel.

↪ Chaque réel x admet un opposé $-x$ vérifiant $x + (-x) = (-x) + x = 0$

↪ La multiplication possède un élément neutre noté 1 : $x \times 1 = 1 \times x = x$

1. Vous les verrez peut-être un jour... En général on définit un nombre réel comme étant la limite d'une suite d'approximations par des rationnels.

2. Lorsque un ensemble possède ces propriétés, on dit que c'est un corps. Certains de vos parents ont étudié la notion de corps en classe de 4^{ème}, cette étude se fait désormais après le lycée... \mathbb{Q} est aussi un corps mais ce n'est pas le cas de \mathbb{Z} ni de \mathbb{N} (pas d'inverse pour la multiplication)

- ↪ Le produit de deux réels est encore un réel.
- ↪ Chaque réel différent de 0 admet un inverse x^{-1} vérifiant $x \times x^{-1} = x^{-1} \times x = 1$
- ↪ La multiplication et l'addition sont associatives et commutatives
- ↪ La multiplication est distributive sur l'addition $x(y + z) = x \times y + x \times z$

Tout ceci est bien naturel. Maintenant, on voudrait faire le même travail en dimension 2 i.e pouvoir calculer avec des couples de nombres du style $(x; y)$. On note l'ensemble de ces couples \mathbb{R}^2 , et on souhaite définir des opérations de manière à faire de \mathbb{R}^2 un corps. On définit alors l'addition comme suit :

$$(x; y) + (x'; y') = (x + x'; y + y')$$

L'élément neutre est alors $(0; 0)$, la somme de deux éléments de \mathbb{R}^2 est encore un élément de \mathbb{R}^2 et l'opposé du nombre $(x; y)$ est $(-x; -y)$. Définissons maintenant la multiplication ! On a envie de la définir de la manière suivante :

$$(x, y) \times (x'; y') = (xx'; yy') \quad \text{avec } (1; 1) \text{ comme élément neutre}$$

Problème : L'inverse de $(x; y)$ est $\left(\frac{1}{x}; \frac{1}{y}\right)$ ce qui veut dire les couples du type $(x; 0)$ avec $x \neq 0$ n'admettent pas d'inverse, or on voudrait que tous les couples différent de $(0; 0)$ admettent un inverse. Il faut changer de définition...

On décide d'adopter la définition suivante, moins naturelle, dans le but d'avoir un élément de la forme $(1; 0)$:

$$(x; y) \times (x'; y') = (xx' - yy'; xy' + x'y)$$

On a bien $(x; y) \times (1; 0) = (x; y)$. De plus l'inverse de $(x; y) \neq (0; 0)$ est $\left(\frac{x}{x^2 + y^2}; -\frac{y}{x^2 + y^2}\right)$ (vous pouvez vérifier !)

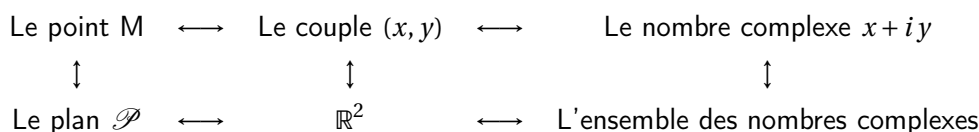
Il est temps d'établir le lien entre $\sqrt{-1}$ et \mathbb{R}^2 tel qu'on l'a construit. On remarque que :

$$(0; 1)^2 = (0; 1) \times (0; 1) = (0 - 1; 0 + 0) = (-1; 0)$$

$(0; 1)$ est alors le nombre que l'on a noté i , et $(-1; 0)$ c'est -1 , et on a alors $i^2 = -1$.

Pour mieux comprendre, imaginons l'ensemble des réels comme une droite graduée (ici représenté par l'axe des abscisses), ajoutons-y un axe des ordonnées pour passer en dimension 2, alors le réel -1 est associé au point de coordonnées $(-1; 0)$, et le nombre dont la racine carré est -1 est lui associé au point de coordonnée $(1; 0)$. Nous notons $i = \sqrt{-1}$ pour qu'il fasse moins peur.

Ainsi nous avons les correspondances



Pour se simplifier la vie, nous allons donner un nom à cet ensemble des nombres complexes : \mathbb{C} . Et maintenant observez comme les calculs deviennent faciles en prologeant les règles valables sur \mathbb{R} !

$$(x + iy) + (x' + iy') = x + iy + x' + iy' = (x + x') + i(y + y')$$

Comme nous avons $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$, mais en plus simple.

$$\text{Et } (x + iy) \cdot (x' + iy') = xx' + ix'y' + iyx' + i^2yy'$$

N'oubliez pas que $i^2 = -1$

$$\text{Alors } (x + iy) \cdot (x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + yx')$$

$$\text{Comme nous avons } (x, y) \times (x', y') = (xx' - yy', xy' + yx')$$

Donc nous allons pouvoir calculer en dimension 2 en généralisant les règles de dimension 1. Nous avons juste ajouté ce nombre i de carré -1 . En particulier, tous les nombres réels sont des nombres complexes : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Nous allons pouvoir associer à chacun de ces nombres un point du plan et donc associer des transformations du plan à des calculs dans \mathbb{C} : on va résoudre des problèmes de géométrie par le calcul.

II.2. Forme algébrique d'un nombre complexe et opérations

Théorème 1.

Il existe un ensemble de nombres, dits complexes :

- ↪ muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de \mathbb{R}
- ↪ contenant un nombre i vérifiant $i^2 = -1$
- ↪ tel que chaque nombre complexe z peut s'écrire de manière unique sous la forme :

$$z = a + ib \text{ avec } a \text{ et } b \text{ des nombres réels}$$

- ↪ et réciproquement tout nombre de la forme $z = a + ib$, avec a et b réels, est un nombre complexe

Remarque :

- ↪ Nous avons prouvé l'existence d'un tel ensemble dans le paragraphe précédent.
- ↪ Cette écriture unique est appelée forme algébrique du nombre complexe z
- ↪ L'ensemble des nombres complexes se note \mathbb{C} et :

$$\mathbb{C} = \{a + ib, \text{ avec } a \text{ et } b \text{ parcourant les nombres réels}\}$$

- ↪ $i \notin \mathbb{R}$, en effet il n'existe pas de nombres réels tel que son carré est strictement négatif.
- ↪ Par exemple, $z = 3 - 2i$ est un nombre complexe, ou encore $z = 3$ et $z = -\frac{1}{2}i$ sont des nombres complexes.

On considère deux nombres complexes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x' et y' désignent quatre nombres réels.

Remarques :

- ↪ L'**opposé** d'un nombre complexe z est le complexe noté $-z$ défini par :

$$-z = -x - iy$$

- ↪ **Somme de deux complexes** $z + z' = (x + x') + i(y + y')$
- ↪ **Produit de deux complexes** $zz' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$
- ↪ Tout nombre complexe z non nul admet un unique **inverse** noté $\frac{1}{z}$ dont la forme algébrique est :

$$\frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

- ↪ Le quotient $\frac{z}{z'}$ est par définition égal à $z \times \frac{1}{z'}$ lorsque $z' \neq 0$.
- ↪ $zz' = 0 \iff z = 0$ ou $z' = 0$.

 **Définition 1.**

Soit $z \in \mathbb{C}$, alors il existe deux nombres réels a et b tels que $z = a + ib$.

a est la partie réelle de z et se note $\Re(z)$


b est la partie imaginaire de z et se note $\Im(z)$

 **Exemple :**

Si $z = 3 + 4i$ alors 3 est la partie réelle et 4 est la partie imaginaire.

 **Attention !**

La partie imaginaire est un **nombre réel** .

 **Théorème 2.** (égalité de deux nombres complexes)

Soient x, y, x' et y' quatre nombres réels, alors :

$$x + iy = x' + iy' \iff x = x' \text{ et } y = y'$$

Autrement dit, deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

 **Preuve**

\rightsquigarrow Montrons dans un premier que

$$x + iy = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0$$

\Leftarrow) Si $x = 0$ et $y = 0$ alors $x + iy = 0$

\Rightarrow) Supposons que $y \neq 0$, dans ce cas on a : $i = -\frac{x}{y}$ et par conséquent $i \in \mathbb{R}$, or il n'existe pas de nombres réels tels que $i^2 = -1$. Notre hypothèse est donc absurde, ce qui signifie que $y = 0$ et donc $x + 0 = 0 \iff x = 0$

\rightsquigarrow Considérons désormais deux nombres complexes z et z' tels que

$$z = x + iy \quad z' = x' + iy'$$

et montrons que $z = z' \iff x + iy = x' + iy' \iff x = x' \text{ et } y = y'$

\Leftarrow) Si $x = x'$ et $y = y'$ alors de manière évidente $z = z'$

\Rightarrow) Si $z = z'$ montrons que $x = x'$ et $y = y'$

Comme $z = z'$, on a $z - z' = 0 \iff x - x' + i(y - y') = 0$, par conséquent d'après la première partie de la démonstration :

$$x - x' = 0 \iff x = x' \quad \text{et} \quad y - y' = 0 \iff y = y'$$

3

Exercice 1. On considère deux nombres complexes $z = 3 + 2i$ et $z' = 2 - i$.

Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

3. Humour : Pourquoi la vie des hommes est-elle complexe ? Car elle possède une partie réelle et une partie imaginaire...

1. $z + z'$

3. $z - z'$

5. $2z - 3z'$

2. $z \times z'$

4. $z + 2z'$

6. z^2

**Définition 2.**

Soit z un nombre complexe avec pour écriture algébrique $z = a + ib$

↪ Si $b = 0$, z est réel, ainsi \mathbb{C} contient \mathbb{R} i.e un nombre réel est aussi un nombre complexe.

↪ Si $a = 0$, z est un imaginaire pur. L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$

Remarque :

↪ Dans \mathbb{C} , il n'y a pas de notion d'ordre, on ne pourra donc pas comparer deux nombres imaginaires.

↪ On évitera l'usage abusif du symbole radical $\sqrt{\quad}$ qui reste réservé aux réels positifs.

Exercice 2.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, à quelle condition le nombre complexe $z = x + 2 + i(-ix + x) + 2i - 5ix$ est-il un réel ?

2. A quelle condition est-il un imaginaire pur ?

Exercice 3.

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $3z + 6i = z - 2$.

2. (a) Montrer que $z^2 - 6z + 25 = (z - 3)^2 + 16$.

(b) En déduire les solutions de l'équation $z^2 - 6z + 25 = 0$

Exercice 4. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation :

$$\frac{-i}{z+1} = 2$$

Exercice 5. Résoudre dans \mathbb{C} les équations ci-contre. Les solutions seront données sous forme algébrique.

1. $(-1 + 2i)z = 3 + i$

2. $z^2 = -9$

Exercice 6. Déterminer les formes algébriques des nombres complexes donnés. Préciser, le cas échéant, s'il est réel ou imaginaire pur :

1. $z_1 = i(1 - 4i) + 3(2 - i)$

3. $z_3 = \frac{3}{1 - i}$

2. $z_2 = (3 - i)^2 + 6i$

4. $z_4 = \frac{1 + 2i}{2 - i}$

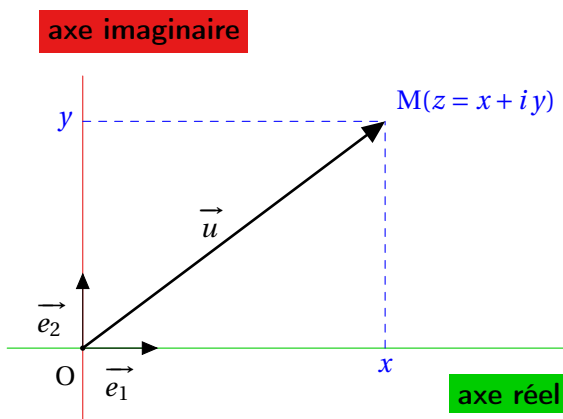
Exercice 7. Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation :

$$\frac{z + 3i}{-5iz + 2} = -i$$

III. Le plan complexe et le conjugué

III.1. Définition

Nous avons vu que chaque nombre complexe peut être associé à un point du plan qu'on munit d'un repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ orthonormé.



Définition 3.

À tout point M du plan de coordonnées (x, y) , on associe le nombre complexe $z = x + iy$ appelée affixe du point M, on le note souvent z_M .
 Réciproquement, à chaque point $M(x; y)$ correspond un unique nombre complexe $z = x + iy$.
 Enfin, à tout vecteur \vec{u} de coordonnées (x, y) est associé une affixe $z_{\vec{u}} = x + iy$

Exemple :

à $z = 2 - 5i$ correspond le point $M(2; -5)$ et réciproquement. L'affixe du point M est le nombre complexe z

Remarque : La droite passant par O de vecteur directeur \vec{e}_1 est appelé l'axe réel (ou axe des réels) du plan complexe (cet axe correspond à l'axe des abscisses).
 La droite passant par O de vecteur directeur \vec{e}_2 est appelé l'axe imaginaire (ou axe des imaginaires) du plan complexe (cet axe correspond à l'axe des ordonnées).

Exercice 8.

- L'affixe du point $T(4; -3)$ est le complexe $z_T = 4 - 3i$.
- L'image du complexe $z = i - 3$ est le point $M(z) (-3; 1)$.
- Dans un plan muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, déterminons l'affixe de chacun des vecteurs suivants : $\vec{e}_1, \vec{e}_2, -\vec{e}_1$ et $-\vec{e}_2$.

$z_{\vec{e}_1} = 1$

$z_{\vec{e}_2} = i$

$z_{-\vec{e}_1} = -1$

$z_{-\vec{e}_2} = -i$

III.2. Conjugué d'un nombre complexe.

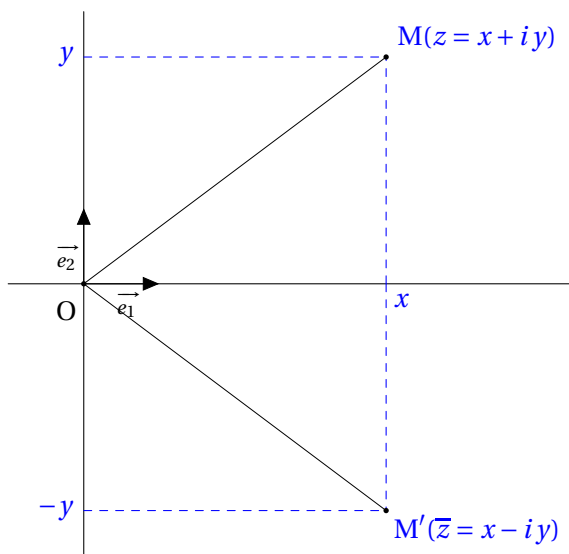
 **Définition 4.**

On considère un nombre complexe $z = x + iy$. On appelle conjugué de z , le nombre complexe, noté \bar{z} tel que

$$\bar{z} = x - iy$$

On dit que z et \bar{z} sont des nombres complexes conjugués.


Interprétation géométrique du conjugué : Les images de deux nombres complexes conjugués sont symétriques par rapport à l'axe des réels :



 **Exemple :**

Le conjugué de $z = 4 - 2i$ est $\bar{z} = 4 + 2i$, le conjugué de i est $-i$, de 7 est 7 .

Remarque : On a $\Re(z) = \Re(\bar{z})$

 **Corollaire 1.** (Critère pour qu'un nombre complexe soit réel (resp. imaginaire pur))

On a :

$$z + \bar{z} = 2\Re(z)$$

$$z - \bar{z} = 2i\Im(z)$$

Et les propriétés suivantes :

$$z \text{ est réel} \iff z = \bar{z}$$

$$\text{et } z \text{ est imaginaire pur} \iff z = -\bar{z}$$

 **Preuve**

Notons $z = x + iy$ avec x et y deux réels. Ainsi :

$$z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x = 2\Re(z) \text{ et } z - \bar{z} = x + iy - (x - iy) = 2iy = 2i\Im(z)$$

On en déduit immédiatement que :

$$z \text{ est réel} \iff \Im(z) = 0 \iff z - \bar{z} = 0 \iff z = \bar{z}$$

$$z \text{ est imaginaire pur} \iff \Re(z) = 0 \iff z + \bar{z} = 0 \iff z = -\bar{z}$$

 **Théorème 3.**

Pour tout nombre complexe $z = x + iy$, on a :

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$$

 **Preuve**

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - ixy + ixy - i^2y = x^2 + y^2$$

 **Application :**


Pour écrire les nombres complexes fractionnaires sous la forme $x + iy$, i.e sous la forme algébrique on multiplie le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée.

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{(a + ib)(c - id)}{c^2 + d^2} \left(= \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} \right)$$

 **Exemple :**

1. $\frac{2 + 4i}{1 - i} = \frac{(2 + 4i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{2 + 4i + 2i + 4i^2}{1^2 + 1^2} = \frac{-2 + 6i}{2} = -1 + 3i$
2. $\frac{1}{2i + 3} = \frac{-2i + 3}{4 + 9} = \frac{3}{13} - \frac{2i}{13}$

Exercice 9. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants : $\frac{1 - i}{1 + i}$ et $\frac{1}{2 + i}$

 **Propriété 1.**

Pour tous nombres complexes z et z' , on a :


1. $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$

3. $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$

5. $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$ (avec $z' \neq 0$)

2. $\overline{-z} = -\bar{z}$

4. $\overline{z^n} = \bar{z}^n$

 **Preuve**

Soit $z = x + iy$ et $z' = x' - iy'$ (avec x, y, x' et y' réels), alors :

$$\overline{z + z'} = \overline{x + iy + x' + iy'} = \overline{x + x' + i(y + y')} = x + x' - i(y + y')$$

$$\overline{z} + \overline{z'} = \overline{x + iy} + \overline{x' + iy'} = x - iy + x' - iy' = x + x' - i(y + y')$$

Par conséquent $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.

On démontre de manière similaire les autres égalités.

Exercice 10. Déterminer les conjugués des nombres complexes suivants :

1. $z = \frac{4 - 5i}{3 + i}$

2. $z = \frac{1}{2 + i}$

Exercice 11. Déterminer le lieu des points M d'affixe z telle que $\frac{iz - 1}{z - i}$ soit réel.

 **Application :**

Si un polynôme, à coefficients réels, admet un nombre complexe z comme racine alors \overline{z} est aussi une racine de P puisque, d'après les propriétés de la conjugaison (qui commute avec les exposants, les produits et les sommes) :

$$P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$$

Et donc si $P(z) = 0$ alors $\overline{P(z)} = 0$ d'où $P(\overline{z}) = 0$

 **Exemple :**

On donne $P(x) = x^2 + 1$. Déterminer les racines de P et vérifier qu'elles sont conjuguées.

Exercice 12. On considère le complexe $z = x^2 + y^2 - 2x - 3 + i(2x - 1 + y)$


- Déterminer et représenter l'ensemble E des points M d'affixe z tel que z soit un réel.
- Déterminer et représenter l'ensemble F des points M' d'affixe z tel que z soit un imaginaire pur.

Exercice 13. On considère dans \mathbb{C} le polynôme défini par :

$$P(z) = z^4 + 4$$

- Montrer que si le complexe α est solution, il en est de même pour $-\alpha$.
- Vérifier que, pour tout nombre complexe z on a $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$
- Calculer $P(1 + i)$ et en déduire les solutions de $P(z) = 0$.

III.3. Premiers calculs géométriques

 **Propriété 2.**

Dans le repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, notons z_A l'affixe du point A et z_B l'affixe du point B, alors l'affixe du vecteur \vec{AB} est $z_B - z_A$

 **Preuve**

Notons $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ alors $z_A = x_A + iy_A$ et $z_B = x_B + iy_B$.


On a $\vec{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$, donc l'affixe du vecteur \vec{AB} est $(x_B - x_A + i(y_B - y_A))$

D'autre part, $z_B - z_A = x_B + iy_B - (x_A + iy_A) = x_B - x_A + i(y_B - y_A)$

Par conséquent l'affixe du vecteur \vec{AB} est $z_B - z_A$

 **Exemple :**

L'affixe du vecteur \vec{AB} avec $A(3;5)$ et $B(5;8)$ est donc $z = 2 + 3i$

 **Propriété 3.**

Dans un plan complexe, soient les vecteurs \vec{u} et \vec{v} d'affixe respective $z_{\vec{u}}$ et $z_{\vec{v}}$.

1. Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont égaux ssi ils ont même affixe.
Autrement dit, $\vec{u} = \vec{v} \iff z_{\vec{u}} = z_{\vec{v}}$.
2. L'affixe du vecteur somme $\vec{u} + \vec{v}$ est la somme des affixes des vecteurs \vec{u} et \vec{v} .
Autrement dit, $z_{\vec{u} + \vec{v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}$.
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, le vecteur $\lambda \vec{u}$ a pour affixe le produit du réel λ par l'affixe du vecteur \vec{u} .
Autrement dit, $z_{\lambda \vec{u}} = \lambda z_{\vec{u}}$.
4. I est le milieu de [AB] $\iff z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$.
5. La translation de vecteur \vec{u} amène le point $M(z)$ sur le point $M'(z')$ tel que $z' = z + z_{\vec{u}}$.

Exercice 14. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1 + 2i$ et $z_B = 2 - i$. Déterminer l'affixe de C tel que OABC soit un parallélogramme :

1. en utilisant les affixes de vecteurs;
2. en utilisant les affixe d'un milieu.

Exercice 15. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = \frac{3}{2}i$, $z_B = 2 + \frac{1}{2}i$, $z_C = 1 - \frac{3}{2}i$ et $z_D = -1 - \frac{1}{2}i$.

1. Placer les points sur un graphique puis déterminer l'affixe du milieu I du segment [AC].
2. Déterminer les affixes des vecteurs \vec{AB} et \vec{DC} . Que peut-on en déduire ?
3. Déterminer l'affixe du point E symétrique de A par rapport à B.

IV. Equations du second degré à coefficients réels

IV.1. Equations du type $x^2 = a$ où $a \in \mathbb{R}$

- Si $a \geq 0$ alors $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$ (cas déjà connu depuis le collège).
- Dans le cas contraire on a $a < 0$, on peut donc considérer le nombre $i\sqrt{-a}$ qui vérifie l'équation $x^2 = a$, on a :

$$\begin{aligned} x^2 &= a \\ \Leftrightarrow x^2 - a &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - (i\sqrt{-a})^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - i\sqrt{-a})(x + i\sqrt{-a}) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = i\sqrt{-a} \quad \text{ou} \quad x = -i\sqrt{-a} \end{aligned}$$

Ainsi même $-i\sqrt{-a}$ est une solution de cette équation, et ce sont les deux seules solutions.

D'où le résultat suivant :

◆ Propriété 4.

Soit $a \in \mathbb{R}$. L'équation $x^2 = a$ possède deux solutions dans \mathbb{C} :

- Si $a \geq 0$, ce sont les réels suivants : $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$.
- Si $a < 0$, ce sont les imaginaires purs conjugués suivants : $x = i\sqrt{-a}$ ou $x = -i\sqrt{-a}$

Exercice 16. Résolvons dans \mathbb{C} les équations suivantes :

1. $x^2 = -3$
2. $z^2 + \frac{3}{4} = 0$
3. $z^2 = \cos^2 \theta - 1$ pour θ un réel fixé.
4. $x + \frac{1}{x} = 0$



Solutions :

1. $x^2 = -3 \Leftrightarrow x = i\sqrt{3}$ ou $x = -i\sqrt{3}$
 $S = \{i\sqrt{3}; -i\sqrt{3}\}$.
2. $z^2 + \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow z^2 = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow z = i\sqrt{\frac{3}{4}}$ ou $z = -i\sqrt{\frac{3}{4}} \Leftrightarrow z = \frac{i\sqrt{3}}{2}$ ou $z = \frac{-i\sqrt{3}}{2}$
 $S = \left\{ \frac{i\sqrt{3}}{2}; -\frac{i\sqrt{3}}{2} \right\}$.
3. $z^2 = \cos^2 \theta - 1 \Leftrightarrow z^2 = -\sin^2 \theta \Leftrightarrow z = i\sqrt{\sin^2 \theta}$ ou $z = -i\sqrt{\sin^2 \theta} \Leftrightarrow z = \pm i \sin \theta$ ou $z = \mp i \sin \theta$
 $S = \{i \sin \theta; -i \sin \theta\}$.
4. $x + \frac{1}{x} = 0$
 Valeurs interdites : $x = 0$.
 Pour $x \neq 0$: $x + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 = -1 \Leftrightarrow x = i$ ou $x = -i$
 $S = \{i; -i\}$.

IV.2. Equations du type $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$

Considérons le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) lorsque $\Delta \geq 0$ (démontré en première) sont

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2. On suppose que $\Delta < 0$.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2 \times x \times \frac{b}{2a} + \frac{c}{a} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \end{aligned}$$

On remarque que $\Delta = (i\sqrt{-\Delta})^2$ (cf la propriété IV.1. page 12). Par conséquent :

$$\begin{aligned} &\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \\ \Leftrightarrow &\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow &\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow &x = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \end{aligned}$$

D'où le résultat suivant :

 **Théorème 4.**

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$, b et c réels, en notant $\Delta = b^2 - 4ac$, possède deux solutions (distinctes ou confondues) dans \mathbb{C} :

- Si $\Delta \geq 0$, ce sont les réels suivants :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$, ce sont les complexes conjugués suivants :

$$x_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Dans tous les cas (quelque soit le signe de Δ), on obtient la factorisation :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Exercice 17. Résoudre, dans \mathbb{C} , les équations suivantes :

$$2z^2 - 3z + 4 = 0 \quad x^2 - 2x + 2 = 0 \quad 2z^4 + z^2 - 10 = 0$$

**Solutions :**

1. $2z^2 - 3z + 4 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 4 = 9 - 32 = -23 < 0$$

$$\text{Donc } z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{3 - i\sqrt{23}}{4} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{3 + i\sqrt{23}}{4}$$

$$S = \left\{ \frac{3 - i\sqrt{23}}{4}; \frac{3 + i\sqrt{23}}{4} \right\}.$$

2. $x^2 - 2x + 2 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 4 - 8 = -4 < 0$$

$$\text{Donc } x_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2 - i\sqrt{4}}{2} = \frac{2 - 2i}{2} = 1 - i \quad \text{et} \quad x_2 = \overline{x_1} = 1 + i$$

$$S = \{1 - i; 1 + i\}.$$

3. $2z^4 + z^2 - 10 = 0$

On pose $Z = z^2$ donnant $z^4 = Z^2$. Ainsi l'équation $2z^4 + z^2 - 10 = 0$ s'écrit $2Z^2 + Z - 10 = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 2 \times (-10) = 1 + 80 = 81 = 9^2 > 0.$$

$$\text{Donc } Z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - 9}{4} = \frac{-8}{4} = -2 \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + 9}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} (= 2,5)$$

$$\text{On doit alors résoudre } z^2 = Z_1 \iff z^2 = -2 \iff z_1 = i\sqrt{2} \quad \text{et} \quad z_2 = -i\sqrt{2}$$

$$\text{et } z^2 = Z_2 \iff z^2 = \frac{5}{2} \iff z_3 = \sqrt{\frac{5}{2}} \quad \text{et} \quad z_4 = -\sqrt{\frac{5}{2}}$$

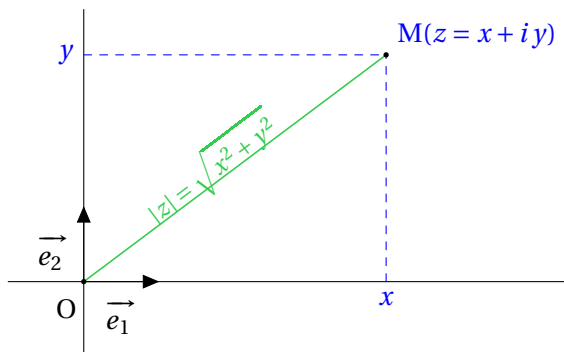
On peut vérifier aisément que z_1, z_2, z_3, z_4 sont bien solution de l'équation $2z^4 + z^2 - 10 = 0$.

$$S_{\{2z^4 + z^2 - 10 = 0\}} = \left\{ i\sqrt{2}; -i\sqrt{2}; \sqrt{\frac{5}{2}}; -\sqrt{\frac{5}{2}} \right\}$$

Remarque : En définitive, si $\Delta > 0$, les deux racines sont réelles et distinctes ; si $\Delta = 0$, il y a une racine double réelle (les deux racines sont confondues) ; si $\Delta < 0$, les deux racines sont complexes non réelles conjuguées et distinctes.

V. Module et argument d'un nombre complexe

V.1. Module



Définition 5.

On considère z un nombre complexe, $z = x + iy$ (x et y réels). Le module de z est le nombre réel positif noté $|z|$ et défini par $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Remarque :

- ↪ Si z est l'affixe d'un point M , le module de z n'est autre que la distance OM : $OM = |z|$. Par conséquent si z est l'affixe d'un vecteur \vec{AB} alors $AB = |z_B - z_A|$
- ↪ Si $z = x + iy$ est réel ($y = \Im m(z) = 0$), on a $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$. Le module d'un nombre réel est donc sa valeur absolue, ce qui justifie la notation.
- ↪ On a :

$$z\bar{z} = |z|^2$$

Exemple :

Si $z = 3 - 4i$, alors $|z| = 5$. Si $z = 9i$ alors $|z| = 9$.

Exercice 18. On donne $z_A = -1 + 4i$ et $z_B = 2 - i$. Notons A l'image de z_A et B l'image de z_B ; calculer la distance AB.

Propriété 5.

- | | |
|--|--|
| 1. $ z \geq 0$ pour tout nombre complexe z | 4. $ zz' = z z' $ |
| 2. $ z = 0 \iff z = 0$ | 5. $\left \frac{z}{z'} \right = \frac{ z }{ z' }$ |
| 3. Si $z = x + iy$ alors $ z \geq \max(x , y)$ | 6. $ z + z' \leq z + z' $ (inégalité triangulaire) |

Preuve

1. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$
2. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \iff x^2 + y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0$
3. $x \leq \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ et de même $y \leq \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$
- 4.

$$|zz'|^2 = zz'\overline{zz'} = zz'\overline{z}\overline{z'} = z\overline{z}z'\overline{z'} = |z|^2|z'|^2$$

Comme un module est positif on obtient : $|zz'| = |z||z'|$

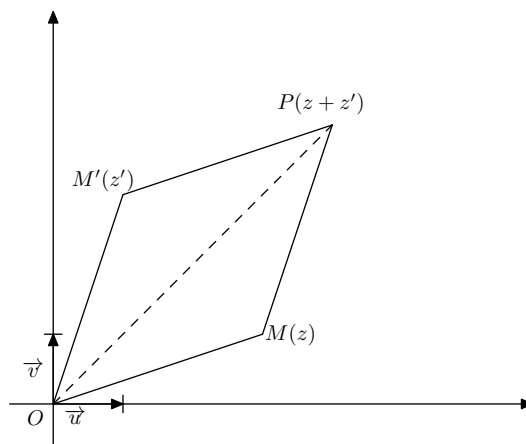
- 5.

$$\left| \frac{z}{z'} \right|^2 = \frac{z}{z'} \frac{\overline{z}}{\overline{z'}} = \frac{z\overline{z}}{z'\overline{z'}} = \frac{|z|^2}{|z'|^2}$$

Comme un module est positif on obtient : $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$

6. Pour comprendre l'inégalité triangulaire il suffit d'observer cette figure :

On a bien $OP \leq OM + OM'$
et donc $|z + z'| \leq |z| + |z'|$



Démonstration plus rigoureuse : Comme les deux membres de l'inégalité sont positifs, il suffit donc de comparer les carrés de chaque membre. Or

$$|z + z'|^2 = (z + z')(\overline{z + z'}) = (z + z')(\overline{z} + \overline{z'}) = |z|^2 + (z\overline{z'} + \overline{z}z') + |z'|^2$$

D'autre part

$$(|z| + |z'|)^2 = |z|^2 + 2|zz'| + |z'|^2$$

Il s'agit donc de comparer les « doubles produits ».

Or, $z\overline{z'} + \overline{z}z' = z\overline{z'} + \overline{z}z' = 2\Re(z\overline{z'}) \leq 2|zz'|$ d'après une propriété ci-dessus. Donc

$$|z + z'|^2 = |z|^2 + (z\overline{z'} + \overline{z}z') + |z'|^2 \leq |z|^2 + 2|zz'| + |z'|^2 = (|z| + |z'|)^2$$

Exercice 19. Soient A(0;4), B(3;0) et C(6;8). Quelle est la nature du triangle ABC ?

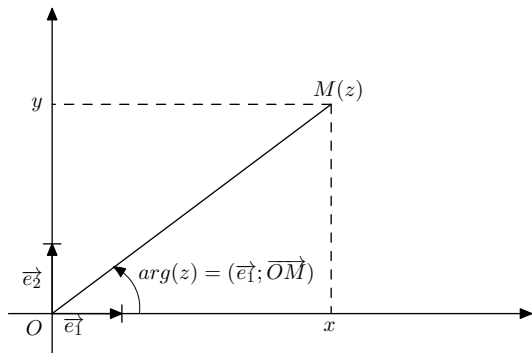
✳ Application :

Soient u et v deux nombres complexes distincts et de même module r , montrer que $\frac{u+v}{u-v}$ est un imaginaire pur. On a :

$$\overline{\left(\frac{u+v}{u-v}\right)} = \frac{\bar{u} + \bar{v}}{\bar{u} - \bar{v}} = \frac{uv\bar{u} + uv\bar{v}}{uv\bar{u} - uv\bar{v}} = \frac{|u|^2v + u|v|^2}{|u|^2 - u|v|^2} = \frac{r^2v + ur^2}{r^2 - ur^2} = -\frac{u+v}{u-v}$$

Ce qui prouve que $\frac{u+v}{u-v}$ est un imaginaire pur.

V.2. Argument d'un nombre complexe



i Rappel sur les coordonnées polaires :

On se place dans un plan \mathcal{P} avec un repère orthonormal direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Soit M un point du plan \mathcal{P} distinct de l'origine O .

Les coordonnées polaires du point M sont les couples $(r; \theta)$ tel que $r \equiv \overline{OM}$ et θ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{e}_1, \overline{OM})$. On se souvient que r est défini de façon unique mais que θ n'est défini qu'à l'addition d'un multiple entier de 2π près.

Le lien entre les coordonnées polaires et les coordonnées cartésiennes $(x; y)$ de M est défini par les égalités : $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$.

Et réciproquement $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\cos \theta = \frac{x}{r}$,

$\sin \theta = \frac{y}{r}$.

Ainsi l'affixe du point M est alors $r \cos \theta + ir \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$.

📖 Définition 6.

z est un nombre complexe non nul d'image M , $z = x + iy$ (x et y réels). On appelle argument de $z \neq 0$ toute mesure, en radians, de l'angle $(\vec{e}_1; \overline{OM})$. On note $\theta = \text{arg}(z)$

Remarque : Un nombre complexe possède une infinité d'arguments! En effet si θ est un argument de z , tout autre argument est de la forme $\theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). L'unique argument appartenant à l'intervalle $] -\pi; \pi[$ s'appelle l'argument principal.

On notera par exemple $\text{arg}(z) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$ ou $\text{arg}(z) = \frac{\pi}{4}$ modulo 2π pour signifier que $\text{arg}(z)$ peut-être égal à $\frac{\pi}{4}$ mais aussi à n'importe lequel des nombres $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

⚠ Attention !

Le nombre complexe $z = 0$ ne possède pas d'argument car, dans ce cas, l'angle $(\vec{e}_1; \overline{OM})$ ne se définit pas.

Exercice 20. Déterminer un argument des nombres complexes suivants : i , 1 , -1 , $-i$ et $1 + i$.

Remarque :

- ↪ Si $z \in \mathbb{R}^+$ alors $\arg(z) = 0[2\pi]$, si $z \in \mathbb{R}^-$ dans ce cas $\arg(z) = \pi[2\pi]$
- ↪ De la même manière un imaginaire pur dont la partie imaginaire est strictement positive a un argument égal à $\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et un imaginaire pur dont la partie imaginaire est strictement négative a un argument égal à $-\frac{\pi}{2}[2\pi]$. Par conséquent :

$$z \in i\mathbb{R} \iff z = 0 \text{ ou } \arg(z) = \frac{\pi}{2}[\pi]$$

Propriété 6.

Tout complexe z non nul peut s'écrire sous la forme, dite trigonométrique, $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r > 0$ (réel) et $\theta \in \mathbb{R}$.

Le réel r est égal à $|z|$, et tout réel θ convenable est appelé argument du complexe z , noté $\arg(z)$.

Le complexe 0 n'a pas d'argument.

Remarque :

1. Le nombre complexe nul n'a pas de forme trigonométrique (puisque pas d'argument).
2. Un nombre complexe possède une infinité d'arguments ! En effet si θ est un argument de z , tout autre argument est de la forme $\theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). L'unique argument appartenant à l'intervalle $]-\pi; \pi]$ s'appelle l'argument principal.
On notera par exemple $\arg(z) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$ ou $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$ modulo 2π pour signifier que $\arg(z)$ peut-être égal à $\frac{\pi}{4}$ mais aussi à n'importe lequel des nombres $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.
3. L'argument d'un nombre complexe n'étant pas unique, il en va de même de la forme trigonométrique, contrairement à la forme algébrique.
4. On remarquera enfin que deux nombres complexes non nuls sont égaux ssi ils ont même module et même argument principal.

Exercice 21. Déterminer une forme trigonométrique des nombres complexes suivants : i , 1 , -1 , $-i$ et $1 + i$.

Exercice 22. Déterminer une forme trigonométrique de $z = -2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \right]$

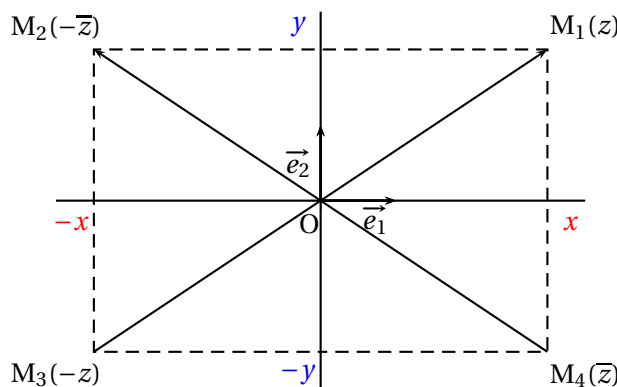
Propriété 7.

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ et $z' \neq 0$.

1. *Conjugué* : $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) [2\pi]$
2. *Opposé* : $\arg(-z) = \arg(z) + \pi [2\pi]$
3. $\arg(-\bar{z}) = \pi - \arg(z) [2\pi]$
4. *Produit* : $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$
5. *Inverse* : $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) [2\pi]$
6. *Quotient* : $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$
7. *Puissance* : $\forall n \in \mathbb{Z}, \arg(z^n) = n \times \arg(z) [2\pi]$

Preuve

Les trois premières propriétés se déduisent immédiatement de la figure suivante :



4 Soit $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ et $z' = r'(\cos \theta' + i \sin \theta')$, alors

$$zz' = rr'[(\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') + i(\sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta')]$$

Vous qui connaissez parfaitement vos formules d'addition (vu en première), vous en déduisez que

$$zz' = z = rr'(\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta'))$$

Ainsi, nous arrivons au résultat capital : $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$

5 $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg\left(z \times \frac{1}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$

En effet $0 = \arg(1) = \arg\left(\frac{1}{z} \times z\right) = \arg\left(\frac{1}{z}\right) + \arg(z)$

6 $\forall n \in \mathbb{N}, \arg(z^n) = \arg(z^{n-1}) + \arg(z) = \arg(z^{n-2}) + 2\arg(z) = \dots = n \times \arg(z)[2\pi]$

Si $n < 0$, alors

$$\arg(z^n) = \arg\left(\frac{1}{z^{-n}}\right) = -n \arg\left(\frac{1}{z}\right) = n \arg(z)[2\pi]$$

Si $n = 0$, c'est trivial.

Remarque : Pour multiplier deux nombres complexes non nuls, on multiplie les modules et on additionne les arguments. Pour diviser deux nombres complexes non nuls, on divise les modules et on soustrait les arguments

Exercice 23. Déterminer une forme trigonométrique de $z = -2\sqrt{3} + 2i$ puis de $z' = 3 - 4i$, en déduire une forme trigonométrique de zz' et de $\frac{z}{z'}$

Exercice 24. Soit $z = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ et $z' = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$. Calculer zz'

V.3. Forme Exponentielle

Nous allons voir maintenant une troisième façon, fort commode, de noter les nombres complexes. Soit z un nombre complexe de module r et d'argument θ , alors on a vu que :

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

Il s'agit ici de la forme trigonométrique d'un nombre complexe, on choisit d'adopter la notation suivante :

 **Définition 7.**

Pour tout réel θ on note :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

(formule d'Euler, important mathématicien suisse).

Ainsi on obtient :

$$z = r e^{i\theta}$$


Cette notation présente de nombreux avantages, en plus d'alléger la notation trigonométrique, si l'on considère deux nombres complexes z et z' de module r et r' et d'argument θ et θ' , alors on a vu que le module de zz' est rr' et l'argument de zz' est $\theta + \theta'$. Observons le calcul suivant :

$$zz' = r e^{i\theta} r' e^{i\theta'} = r r' e^{i\theta+i\theta'} = r r' e^{i(\theta+\theta')}$$

On retrouve le module et l'argument du nombre complexe zz' en utilisant les règles de calculs sur les puissances.

Remarque :

- $e^{i\theta}$ désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument θ : $|e^{i\theta}| = 1$ et $\arg(e^{i\theta}) = \theta[2\pi]$
- Tout nombre complexe z d'argument θ et de module r s'écrit $z = r e^{i\theta}$, Cette écriture est appelée **forme exponentielle**, comme la forme trigonométrique elle n'est pas unique.

 **Exemple :**

$$e^{i0} = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$


$$e^{i2\pi} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$$

$$e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{-\pi}{2} + i \sin \frac{-\pi}{2} = -i$$

$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$ donnant la fameuse identité d'Euler $e^{i\pi} + 1 = 0$ qui lie tous les nombres fondamentaux de l'analyse : e , i , π , 1 et 0 (on la retrouve sous forme $e^{i\pi} = -1$ au plafond de la salle des mathématiques du Palais de la découverte, Paris 75008).

Remarque : Le conjugué de $e^{i\theta}$ est $\overline{e^{i\theta}} = \cos \theta - i \sin \theta = \cos \theta + i \sin(-\theta) = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = e^{-i\theta}$

Une simple transcription des propriétés vues sur les arguments donne alors :

 **Propriété 8.**

$\forall \theta$ et θ' de \mathbb{R} on a :

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \text{ pour } n \in \mathbb{Z}$$

Exercice 25. Soit $z = 3e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $z' = 5e^{i\frac{\pi}{12}}$, donner une forme exponentielle de zz' et de $\frac{z}{z'}$

Exercice 26.

- On note $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$. Déterminer les formes exponentielles de z_1 et z_2
- En déduire la forme exponentielle du nombre complexe $z = \frac{z_1^4}{z_2^3}$

3. Calculer $(1 + i)^{14}$

Enigme⁴ : Trouver l'erreur dans le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
 & e^{i2\pi} = 1 \\
 \Leftrightarrow & \left(e^{i2\pi} \right)^x = 1^x = 1 \\
 \Leftrightarrow & e^{i2\pi x} = 1 \\
 \text{pour } x = \frac{1}{4} \text{ on obtient :} & e^{i\frac{\pi}{2}} = 1 \\
 \text{d'où :} & i = 1
 \end{aligned}$$

Remarque : Retrouvons les formules d'additions du cosinus et du sinus pour $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
 e^{i(a+b)} = e^{ia} e^{ib} & \Leftrightarrow \cos(a+b) + i \sin(a+b) = (\cos(a) + i \sin(a))(\cos(b) + i \sin(b)) \\
 & \Leftrightarrow \cos(a+b) + i \sin(a+b) = \cos(a)\cos(b) + i \cos(a)\sin(b) + i \sin(a)\cos(b) + i^2 \sin(a)\sin(b) \\
 & \Leftrightarrow \cos(a+b) + i \sin(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) + i(\sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)) \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) \end{cases}
 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
 \cos(a-b) &= \cos(a+(-b)) \\
 &= \cos(a)\cos(-b) - \sin(a)\sin(-b) \\
 &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)(-\sin(b)) \\
 &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)
 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
 \sin(a-b) &= \sin(a+(-b)) \\
 &= \sin(a)\cos(-b) + \sin(-b)\cos(a) \\
 &= \sin(a)\cos(b) + (-\sin(b))\cos(a) \\
 &= \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)
 \end{aligned}$$

Autre rédaction des formules de soustractions :

$$\begin{aligned}
 e^{i(a-b)} = e^{ia} e^{-ib} & \Leftrightarrow e^{i(a-b)} = e^{ia} \overline{e^{ib}} \\
 & \Leftrightarrow \cos(a-b) + i \sin(a-b) = (\cos(a) + i \sin(a)) \overline{(\cos(b) + i \sin(b))} \\
 & \Leftrightarrow \cos(a-b) + i \sin(a-b) = (\cos(a) + i \sin(a))(\cos(b) - i \sin(b)) \\
 & \Leftrightarrow \cos(a-b) + i \sin(a-b) = \cos(a)\cos(b) - i \cos(a)\sin(b) + i \sin(a)\cos(b) - i^2 \sin(a)\sin(b) \\
 & \Leftrightarrow \cos(a-b) + i \sin(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) + i(\sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)) \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Attention : Ceci ne consiste pas une démonstration des formules d'addition du cosinus et du sinus car pour démontrer $e^{i(a+b)} = e^{ia} \times e^{ib}$, on a utilisé ces formules.

4. Réponse : La relation $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ n'est valable que si $n \in \mathbb{Z}$

V.4. Interprétation géométrique

V.4.a. Calculs de distances

Rappelons que si $z_A = x_A + iy_A$ et $z_B = x_B + iy_B$ sont les affixes respectives de deux points A et B alors

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = |z_{\overline{AB}}| = |z_B - z_A|$$

Exemple :

Déterminons l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que :

$$|z - 2| = |z + i|$$

Pour cela considérons les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2$ et $z_B = -i$, on a alors :

$$|z - 2| = |z + i| \iff |z - z_A| = |z - z_B| \iff AM = BM$$

L'ensemble recherché est donc la médiatrice du segment [AB]

Exercice 27.

1. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z telles que :

$$|z - 3i| = 2$$

2. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z telles que :

$$|z - 2| = |2z + i|$$

Solutions :

1. En considérant le point C d'affixe $z_C = 3i$ on obtient :

$$|z - 3i| = 2 \iff |z - z_C| = 2 \iff CM = 2$$

L'ensemble recherché est donc le cercle de centre C et de rayon 2.

2. En considérant les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2$ et $z_B = -\frac{i}{2}$ on obtient :

$$|z - 2| = |2z + i| \iff |z - 2| = |2(z - z_B)| \iff |z - z_A| = 2|z - z_B| \iff MA = 2MB$$

Pour conclure on utilisera la méthode générale rappelée ci-après.

V.4.b. Calculs d'angles

Théorème 5.

Si A et B sont deux points distincts du plan complexe d'affixes respectives z et z' alors :

$$\left(\vec{e}_1; \overrightarrow{AB}\right) = \arg(z' - z) [2\pi]$$

 **Preuve**

Soit $M(z'')$ le point tel que : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.

Ainsi :

$$(e_1; \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{OM}) = \arg(z'')[2\pi]$$

De plus

$$z'' = z_{\overrightarrow{OM}} = z_{\overrightarrow{AB}} = z' - z$$

Par conséquent $(e_1; \overrightarrow{AB}) = \arg(z' - z)[2\pi]$

 **Exemple :**

On donne $A(1)$ et $B(2, i\sqrt{3})$. Déterminer une mesure de l'angle $(e_1; \overrightarrow{AB})$.

On a :

$$b - a = 1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

d'où :

$$(e_1; \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$$

 **Théorème 6.**

Si A, B, C et D sont quatre points deux à deux distincts du plan complexe d'affixes respectives a, b, c et d alors :

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)[2\pi]$$

 **Preuve**

Les affixes des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont respectivement $b - a$ et $d - c$.

D'après le résultat précédent :

$$\arg(b - a) = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{AB})[2\pi] \quad \text{et} \quad \arg(d - c) = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{DC})[2\pi]$$

Or, d'après la relation de Chasles sur les angles :

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{e_1}) + (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{CD})[2\pi] = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{CD}) - (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{AB})[2\pi]$$

Et d'après les propriétés des arguments :

$$\arg(d - c) - \arg(b - a) = \arg\left(\frac{d - c}{b - a}\right)[2\pi]$$

Au final :

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{d - c}{b - a}\right)[2\pi]$$

Corollaire 2.

$A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ et $D(d)$ étant 4 points du plan, deux à deux distincts, on a :

1.

$$(AB) \perp (CD) \iff \frac{d-c}{b-a} \in i\mathbb{R}$$

2.

$$(AB) // (CD) \iff \frac{d-c}{b-a} \in \mathbb{R}$$



Preuve

1. On a :

$$\begin{aligned} (AB) \perp (CD) &\iff (\vec{AB}; \vec{CD}) = \frac{\pi}{2}[\pi] \\ &\iff \operatorname{arg}\left(\frac{d-c}{b-a}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi] \\ &\iff \frac{d-c}{b-a} \in i\mathbb{R} \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} (AB) // (CD) &\iff (\vec{AB}; \vec{CD}) = 0[\pi] \\ &\iff \operatorname{arg}\left(\frac{d-c}{b-a}\right) = 0[\pi] \\ &\iff \frac{d-c}{b-a} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Remarque : En particulier si $A \neq C$ on a :

$$\frac{b-c}{a-c} \text{ est un imaginaire pur} \iff \text{les points } A, B \text{ et } C \text{ sont alignés}$$



Exemple :

On donne $A(5+3i)$ et $B(5-8i)$. Le triangle OAB est-il rectangle en O ?

D'après ce qui précède :

$$(\vec{OA}; \vec{OB}) = \operatorname{arg}\left(\frac{b}{a}\right) [2\pi]$$

Or

$$\frac{b}{a} = \frac{5-8i}{5+3i} = \frac{1-55i}{34} \notin i\mathbb{R}$$

Donc les droites (OA) et (OB) ne sont pas perpendiculaires

V.4.c. Caractérisation des principaux objets géométriques

V.4.c.i. Le cercle Le cercle de centre A est de rayon r est l'ensemble des points situés à la distance r de A, par conséquent :

Propriété 9. (caractérisation d'un cercle)

$$M(z) \in \mathcal{C}(A, r) \iff |z - z_A| = r$$

Propriété 10.

Dans le plan complexe, on considère le cercle \mathcal{C} de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon r et un point M d'affixe z. Alors :

$$M(z) \in \mathcal{C} \iff z = \omega + re^{i\theta} \quad \text{avec } \theta \in [0; 2\pi[$$

Preuve

On sait que $M(z) \in \mathcal{C} \iff M\Omega = r \iff |z - \omega| = r$.

On appelle θ la mesure principal $(\vec{e}_1; \vec{\Omega M})$. Alors : $M(z) \in \mathcal{C} \iff z - \omega = re^{i\theta}$.

Remarque : Cette égalité est appelée équation paramétrique du cercle \mathcal{C} .

Exemple :

L'ensemble des points d'affixes $z = 4i + 2 + 3e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0; 2\pi[$ représente le cercle de centre $\Omega(4i + 2)$ et de rayon 3.

V.4.c.ii. Triangle Isocèle ABC est un isocèle de sommet principal A si et seulement si $AB = AC$ donc :

Propriété 11. (Triangle Isocèle)

$$ABC \text{ est isocèle de sommet principal A} \iff |z_B - z_A| = |z_C - z_A| \iff \left| \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right| = 1$$

V.4.c.iii. Triangle rectangle On peut encore parler distance grâce au théorème de Pythagore

$$|z_C - z_B|^2 = |z_B - z_A|^2 + |z_C - z_A|^2$$

ou angle droit : mais c'est l'angle géométrique qui nous intéresse, donc nous travaillerons modulo π

$$(\vec{AB}, \vec{AC}) = (\vec{AB}, \vec{e}_1) + (\vec{e}_1, \vec{AC}) = -(\vec{e}_1, \vec{AB}) + (\vec{e}_1, \vec{AC}) = -\text{arg}(z_{\vec{AB}}) + \text{arg}(z_{\vec{AC}}) = \text{arg}\left(\frac{z_{\vec{AC}}}{z_{\vec{AB}}}\right) = \text{arg}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$$

Propriété 12.

$$(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{2} [\pi] \iff \text{arg}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} [\pi]$$

V.4.c.iv. Interprétation graphique du quotient $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ Il suffit de remarquer que $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}$. Donc vous utiliserez le fait que

$$\rightsquigarrow \operatorname{arg} \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) = (\vec{e}_1, \overrightarrow{AC}) - (\vec{e}_1, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

$$\rightsquigarrow \left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = \frac{AC}{AB}$$

Dans d'autres cas, vous serez confrontés à l'interprétation d'une égalité du style $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \lambda$ qui se traduit par $z_{\overrightarrow{AC}} = \lambda z_{\overrightarrow{AB}}$, donc

\rightsquigarrow si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$ et donc A, B et C sont alignés.

\rightsquigarrow si $\lambda \in i\mathbb{R}$, $z_{\overrightarrow{AC}} = \pm |\lambda| i z_{\overrightarrow{AB}}$ et donc $\operatorname{arg}(z_{\overrightarrow{AC}}) = \pm \frac{\pi}{2} + \operatorname{arg}(z_{\overrightarrow{AB}}) [2\pi]$ c'est à dire $(AC) \perp (AB)$

\rightsquigarrow si $\lambda = \pm i$, alors le triangle ABC est isocèle et rectangle en A

\rightsquigarrow si $\lambda = e^{\pm i\pi/3}$, alors le triangle ABC est équilatéral

V.5. Formules de Moivre. Formules d'Euler (Hors Programme)

Théorème 7.

$\forall \theta \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$ on a :

Formules de Moivre :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

$$(\cos \theta - i \sin \theta)^n = \cos n\theta - i \sin n\theta$$

Formules d'Euler :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$



Preuve

Utilisons les formes exponentielles :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \left(e^{i\theta} \right)^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

ce qui prouve la première formule de Moivre.

$$(\cos \theta - i \sin \theta)^n = (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))^n = \left(e^{-i\theta} \right)^n = e^{-in\theta} = \cos n\theta - i \sin n\theta$$

ce qui prouve la deuxième formule de Moivre.

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta + \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos \theta + i \sin \theta + \cos \theta - i \sin \theta = 2 \cos \theta$$

d'où la première formule d'Euler.

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta - \cos(-\theta) - i \sin(-\theta) = \cos \theta + i \sin \theta - \cos \theta + i \sin \theta = 2i \sin \theta$$

d'où la deuxième formule d'Euler.

✳ Application :

1. Linéariser^a $\sin^3 \theta$ et $\cos^4 \theta$
2. Calculer $\cos 3\theta$ en fonction de $\cos \theta$ et $\sin 3\theta$ en fonction de $\sin \theta$
3. Démontrer que :

$$x^2 - 2x \cos \theta + 1 = (x - e^{i\theta})(x - e^{-i\theta})$$

4. Calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\Re\left(\frac{1}{e^{it} - 1}\right) \quad \text{et} \quad \Re\left(\frac{e^{it}}{e^{it} - 1}\right)$$

5. Démontrer que pour tout $\theta \neq \frac{\pi}{2}[2\pi]$:

$$e^{2i\theta} = \frac{1 + i \tan \theta}{1 - i \tan \theta}$$

6. Calculer $S = \sum_{k=0}^n e^{ikt}$. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin[(2n+1)x] = \sin x \left(2S = \sum_{k=0}^n \cos(2kx) - 1 \right)$$

7. On pose $S = \cos p + \cos q$ et $S' = \sin p + \sin q$. Démontrer que

$$S + iS' = 2e^{i\frac{p+q}{2}} \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

En déduire des expressions de S et S' sous forme de produits. Procéder de même avec $T = \cos p - \cos q$ et $T' = \sin p - \sin q$

a. Linéariser signifie : obtenir une expression sans exposant

**Solutions :**

1. On a :

$$\sin^3 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^3 = \frac{e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}}{-8i} = \frac{2i \sin 3\theta - 6i \sin \theta}{-8i} = -\frac{1}{4} \sin 3\theta + \frac{3}{4} \sin \theta$$

$$\cos^4 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^4 = \frac{e^{4i\theta} + 4e^{2i\theta} + 6 + 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}}{16} = \frac{2 \cos 4\theta + 8 \cos 2\theta + 6}{16} = \frac{1}{8} \cos 4\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{3}{8}$$

2. D'après la formule de Moivre :

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)^3 &= \cos 3\theta + i \sin 3\theta \\ \Leftrightarrow \cos^3 \theta + 3i \cos^2 \theta \sin \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta - i \sin^3 \theta &= \cos 3\theta + i \sin 3\theta \end{aligned}$$

En identifiant partie réelle et imaginaire :

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta (1 - \cos^2 \theta) = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

$$\sin 3\theta = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta = 3(1 - \sin^2 \theta) \sin \theta - \sin^3 \theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$$

3. On développe :

$$(x - e^{i\theta})(x - e^{-i\theta}) = x^2 - (e^{i\theta} + e^{-i\theta})x + 1 = x^2 - 2x \cos \theta + 1$$

4. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$\frac{1}{e^{it} - 1} = \frac{1}{e^{it/2}(e^{it/2} - e^{-it/2})} = \frac{1}{2ie^{it/2} \sin(\frac{t}{2})} = \frac{-ie^{-it/2}}{2 \sin(\frac{t}{2})} = \frac{-i(\cos \frac{t}{2} - i \sin \frac{t}{2})}{2 \sin(\frac{t}{2})} = -\frac{\cos(\frac{t}{2}) + i \sin(\frac{t}{2})}{2 \sin(\frac{t}{2})}$$

Par conséquent :

$$\Re\left(\frac{1}{e^{it} - 1}\right) = -\frac{1}{2}$$

Comme :

$$\frac{e^{it}}{e^{it} - 1} = \frac{1}{1 - e^{-it}}$$

on a :

$$\Re\left(\frac{e^{it}}{e^{it} - 1}\right) = \Re\left(\frac{1}{1 - e^{-it}}\right) = -\Re\left(\frac{1}{e^{-it} - 1}\right) = \frac{1}{2}$$

5. Pour tout $\theta \neq \frac{\pi}{2}[2\pi]$, on a :

$$\frac{1 + i \tan \theta}{1 - i \tan \theta} = \frac{1 + i \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{1 - i \frac{\sin \theta}{\cos \theta}} = \frac{\frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta}}{\frac{\cos \theta - i \sin \theta}{\cos \theta}} = \frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta - i \sin \theta} = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{2i\theta}$$

**Solutions** : suite

6 Pour tout $t \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$, on a :

$$S = \sum_{k=0}^n e^{ikt} = \frac{e^{i(n+1)t} - 1}{e^{it} - 1} = e^{int} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

L'égalité est évidente dans le cas où $t \in 2\pi\mathbb{Z}$

Posons $x = \frac{t}{2}$, ainsi pour $x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$:

$$\Re\left(\sum_{k=0}^n e^{2ikx}\right) = \cos(nx) \frac{\sin[(n+1)x]}{\sin x} = \frac{1}{2} \frac{\sin[(2n+1)x] - \sin(-x)}{\sin x} = \frac{1}{2} \frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin x} + \frac{1}{2}$$

d'où

$$\frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin x} = 2 \sum_{k=0}^n \cos 2kx - 1$$

d'où le résultat.

7 On a :

$$S + iS' = e^{ip} + e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}} \left(e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{-i\frac{p-q}{2}} \right) = 2e^{i\frac{p+q}{2}} \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

d'où :

$$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\text{De même } T + iT' = e^{ip} - e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}} \left(e^{i\frac{p-q}{2}} - e^{-i\frac{p-q}{2}} \right) = 2ie^{i\frac{p+q}{2}} \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

d'où :

$$\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$