Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

CORRECTION DE L'INTERROGATION N°7

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1. **(7 points)**

On se propose de démontrer que $\sin x \leq x$ lorsque x est positif et $\sin x \geq x$ lorsque x est négatif. Pour cela on va étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin x - x$$

1. Démontrer que la fonction f est impaire. Quelle symétrie en déduit-on pour sa représentation graphique $\mathscr{C}_f$?
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :
   $$f(-x) = \sin(-x) - (-x) = -\sin x + x = -f(x)$$
   Par conséquent f est impaire ce qui implique que sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2. Calculer $f(0)$ et déterminer la limite de f en $+\infty$.
   $f(0) = \sin 0 - 0 = 0$.
   De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :
   $$-1 \leq \sin x \leq 1 \iff -1 - x \leq f(x) \leq 1 - x$$
   Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - x = -\infty$ donc par comparaison :
   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

3. On se contente pour la suite d'étudier la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$
   (a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in [0;+\infty[$.
   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in [0;+\infty[$:
   $$f'(x) = \cos x - 1$$
   (b) Montrer que pour tout $x \in [0;+\infty[$ on a :
   $$f'(x) \leq 0$$
   Puisque pour tout $x \in [0;+\infty[$ $-1 \leq \cos x \leq 1$ on en déduit que :
   $$-2 \leq f'(x) \leq 0$$
   Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a $f'(x) \leq 0$.
   De plus $f'(x) = 0 \iff \cos x = 1 \iff x = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}$. Ainsi la dérivée s'annule en une infinité de valeurs isolés.
   (c) En déduire le tableau de variation de f sur $[0;+\infty[$. D'après la question précédente $f'(x) \leq 0$ pour $x \geq 0$, de plus $f'(x) = 0 \iff \cos x = 1 \iff x = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}$. Ainsi la dérivée s'annule en une infinité de valeurs isolés, ceci implique que la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

x	0	$+\infty$
$f(x)$	0 ↘	$-\infty$

4. Déduire de la symétrie de la courbe le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
   La fonction f étant impaire on obtient sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

5. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$. Déterminer α.
   La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. De plus $\lim\limits_{x \to +\infty} < 0 < \lim\limits_{x \to +\infty}$ on déduit du théorème des valeurs intermédiaires que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$. De plus on sait que 0 est solution donc :
   $$\alpha = 0$$

6. Conclure.
Du fait que la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et que $f(0) = 0$ on déduit son tableau de signe :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Ainsi pour $x \leq 0$ on a $f(x) \geq 0 \iff \sin x - x \geq 0 \iff \sin x \geq x$ et pour $x \geq 0$ on a $f(x) \leq 0 \iff \sin x - x \leq 0 \iff \sin x \leq x$.

Exercice 2. **(3 points)**

Pour chacune des fonctions f proposées, préciser l'intervalle I sur lequel f est dérivable puis calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ définie sur l'intervalle $[1; +\infty[$.
La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 donc f n'est pas dérivable en 1, de plus f est dérivable sur $]1; +\infty[$ en tant que composée de fonction dérivable donc pour tout $x > 1$ on a :

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

2. $f(x) = \sin(3x + 1)$ définie sur $\mathbb{R}$.
En tant que composée de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ on a donc pour tout nombre réel x :

$$f'(x) = 3\cos(3x + 1)$$

3. $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x + 1}$ définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$
La fonction f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur son ensemble de définition on a pour tout $x \neq -1$:

$$f'(x) = \frac{3x^2 - (x^3 - 1)}{(x + 1)^2} = \frac{-x^3 + 3x^2 + 1}{(x + 1)^2}$$

Nom : …………… **Prénom :** …………… Classe :……

CORRECTION DE L'INTERROGATION N°7

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 3. **(7 points)**

On se propose de démontrer que $\sin x \leq x$ lorsque x est positif et $\sin x \geq x$ lorsque x est négatif. Pour cela on va étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin x - x$$

1. Démontrer que la fonction f est impaire. Quelle symétrie en déduit-on pour sa représentation graphique $\mathscr{C}_f$?
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :
   $$f(-x) = \sin(-x) - (-x) = -\sin x + x = -f(x)$$
   Par conséquent f est impaire ce qui implique que sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2. Calculer $f(0)$ et déterminer la limite de f en $+\infty$.
   $f(0) = \sin 0 - 0 = 0$.
   De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :
   $$-1 \leq \sin x \leq 1 \iff -1 - x \leq f(x) \leq 1 - x$$
   Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - x = -\infty$ donc par comparaison :
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

3. On se contente pour la suite d'étudier la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$
   (a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in [0;+\infty[$.
   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in [0;+\infty[$:
   $$f'(x) = \cos x - 1$$
   (b) Montrer que pour tout $x \in [0;+\infty[$ on a :
   $$f'(x) \leq 0$$
   Puisque pour tout $x \in [0;+\infty[$ $-1 \leq \cos x \leq 1$ on en déduit que :
   $$-2 \leq f'(x) \leq 0$$
   Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a $f'(x) \leq 0$.
   De plus $f'(x) = 0 \iff \cos x = 1 \iff x = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}$. Ainsi la dérivée s'annule en une infinité de valeurs isolés.
   (c) En déduire le tableau de variation de f sur $[0;+\infty[$. D'après la question précédente $f'(x) \leq 0$ pour $x \geq 0$, de plus $f'(x) = 0 \iff \cos x = 1 \iff x = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}$. Ainsi la dérivée s'annule en une infinité de valeurs isolés, ceci implique que la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

x	0	$+\infty$
$f(x)$	0	$\searrow$ $-\infty$

4. Déduire de la symétrie de la courbe le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
   La fonction f étant impaire on obtient sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ $-\infty$

5. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$. Déterminer α.
   La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} < 0 < \lim\limits_{x\to+\infty}$ on déduit du théorème des valeurs intermédiaires que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$. De plus on sait que 0 est solution donc :
   $$\alpha = 0$$

6. Conclure.
Du fait que la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et que $f(0) = 0$ on déduit son tableau de signe :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Ainsi pour $x \leq 0$ on a $f(x) \geq 0 \iff \sin x - x \geq 0 \iff \sin x \geq x$ et pour $x \geq 0$ on a $f(x) \leq 0 \iff \sin x - x \leq 0 \iff \sin x \leq x$.

Exercice 4. **(3 points)**

Pour chacune des fonctions f proposées, préciser l'intervalle I sur lequel f est dérivable puis calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = \sqrt{x^3 - 1}$ définie sur l'intervalle $[1; +\infty[$.
La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 par conséquent la fonction f n'est pas dérivable pour $x = 1$, elle est en revanche dérivable sur $]1; +\infty[$ comme composée de deux fonctions dérivables et on a pour tout $x > 1$:

$$f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 - 1}}$$

2. $f(x) = \cos(1 - 2x)$ définie sur $\mathbb{R}$.
En tant que composée de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = -2\sin(1 - 2x)$$

3. $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^3 + 1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$
Ce quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur son ensemble de définition donc sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et on a pour $x \neq -1$:

$$f'(x) = \frac{(x^3 + 1) - (x - 1)3x^2}{(x^3 + 1)^2} = \frac{x^3 + 1 - 3x^3 + 3x^2}{(x^3 + 1)^2} = \frac{-2x^3 + 3x^2 + 1}{(x^3 + 1)^2}$$