Correction de l'interrogation n°6

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1. **(4 points)**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - a & \text{si } x \leq 2 \\ \sqrt{x^2-3} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a désigne un nombre réel.

1. En décomposant la fonction f démontrer qu'elle est continue sur l'intervalle $]2;+\infty[$.
   Notons g la fonction racine carrée (donc définie et continue sur $\mathbb{R}^+$) par $g(x) = \sqrt{x}$ et h la fonction polynôme (donc définie et continue sur $\mathbb{R}$) par $h(x) = x^2 - 3$.
   Sur l'intervalle $]2;+\infty[$ $f(x) = g \circ h(x)$, f est donc la composée de deux fonctions continues, on en déduit qu'elle est continue sur $]2:+\infty[$.
2. Justifier que la fonction f est continue sur $]-\infty;2[$
   Sur l'intervalle $]-\infty;2[$ f est une fonction polynôme par conséquent f est continue sur $]-\infty;2[$.
3. Déterminer a pour que f soit continue en 2.
   f est continue en 2 si et seulement si :
   $$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) \Longleftrightarrow \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$$
   Or, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = f(2) = 4 - a$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \sqrt{4-3} = 1$. Par conséquent f est continue en 2 si et seulement si :
   $$4 - a = 1 \Longleftrightarrow a = 3$$
   Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a = 3$.

Exercice 2. **(6 points)**

On considère la fonciton P définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{P}(x) = x^3 - 2x^2 + x - 4$$

1. Déterminer les limites de P en $+\infty$ et en $-\infty$.
   Pour tout $x \neq 0$ on a :
   $$\mathrm{P}(x) = x^3\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right)$$
   $$\lim_{x\to\pm\infty} 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3} = 1$$
   Et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ donc par produit :
   $$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{P}(x) = +\infty$$
   De même puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ on a par produit :
   $$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{P}(x) = -\infty$$
   Que peut-on en déduire ?
   On peut en déduire que la représentation graphique de P n'admet pas d'asymptote horizontale en $\pm\infty$.
2. Calculer $\mathrm{P}'(x)$ et dresser le tableau de variation **complet** de P sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, P est une fonction polynôme donc P est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$\mathrm{P}'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$
   $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 12 = 4$ donc P' admet deux racines :
   $$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+2}{6} = 1$$
   d'où :
   $\mathrm{P}(1) = -4$ et $\mathrm{P}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} - \frac{2}{9} + \frac{1}{3} - 4 = \frac{1-6+9-108}{27} = -\frac{104}{27}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$\mathrm{P}'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\mathrm{P}(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{104}{27}$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

3. Expliquer pourquoi l'équation $P(x) = 0$ n'admet pas de solution dans l'intervalle $]-\infty;1]$. P est croissante sur $\left]-\infty;\frac{1}{3}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{3};1\right]$, P admet donc un maximum en $\frac{1}{3}$ qui est $-\frac{104}{27}$ on en déduit que :

$$\forall x \leq 1, P(x) \leq -\frac{104}{27} < 0$$

L'équation $P(x) = 0$ n'admet donc aucune solution sur l'intervalle $]-\infty;1]$.

4. Démontrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$. On note α cette solution.
Sur l'intervalle $[1;+\infty[$ on a :
   - P est une fonction polynôme donc P est continue sur $\mathbb{R}$.
   - P est strictement croissante sur $[1;+\infty[$
   - Sur $[1;+\infty[$ P est à valeurs dans $[-4;+\infty[$ et $0 \in [-4;+\infty[$.

   D'après le corollaire du TVI l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1;+\infty[$.
   On déduit de la question précédente que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

5. A l'aide de la calculatrice déterminer α à 10^{-1} près.
$P(2,3) < 0$ et $P(2,4) > 0$ donc $\alpha \simeq 2,3$.

6. Déterminer le tableau de signe de la fonction P.
Sur l'intervalle $]-\infty;1]$ $P(x) < 0$ et sur l'intervalle $[1;+\infty[$ P est une fonction strictement croissante qui s'annule en α, par conséquent :
   - $P < 0$ sur $]\infty;\alpha[$.
   - $P(x) = 0$ pour $x = \alpha$.
   - $P > 0$ sur $]\alpha;+\infty[$

   d'où :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	

Correction de l'interrogation n°6

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1. **(4 points)**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - a & \text{si } x \leq 2 \\ \dfrac{2}{x^2-3} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a désigne un nombre réel.

1. En décomposant la fonction f démontrer qu'elle est continue sur l'intervalle $]2;+\infty[$.

   Notons g la fonction inverse (donc définie et continue sur $\mathbb{R}^+$) par $g(x) = \dfrac{1}{x}$ et h la fonction polynôme (donc définie et continue sur $\mathbb{R}$) par $h(x) = x^2 - 3$.
   Sur l'intervalle $]2;+\infty[$ $f(x) = 2g \circ h(x)$, f est donc la composée de deux fonctions continues (à un coefficient multiplicatif près), on en déduit qu'elle est continue sur $]2:+\infty[$.

2. Justifier que la fonction f est continue sur $]-\infty;2[$

   Sur l'intervalle $]-\infty;2[$ f est une fonction polynôme par conséquent f est continue sur $]-\infty;2[$.

3. Déterminer a pour que f soit continue en 2.

   f est continue en 2 si et seulement si :

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) \Longleftrightarrow \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$$

   Or, $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2) = 4 - a$ et $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{2}{4-3} = 2$. Par conséquent f est continue en 2 si et seulement si :

$$4 - a = 2 \Longleftrightarrow a = 2$$

   Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a = 2$.

Exercice 3. **(6 points)**

On considère la fonciton P définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{P}(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x + 2$$

1. Déterminer les limites de P en $+\infty$ et en $-\infty$.

   Pour tout $x \neq 0$ on a :

$$\mathrm{P}(x) = x^3\left(-1 + \frac{4}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} -1 + \frac{4}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^3} = -1$$

   Et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ donc par produit :

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{P}(x) = -\infty$$

   De même puisque $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ on a par produit :

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{P}(x) = +\infty$$

   Que peut-on en déduire ?

   On en déduit que la représentation graphique de P n'admet pas d'asymptote horizontale en $\pm\infty$.

2. Calculer $\mathrm{P}'(x)$ et dresser le tableau de variation **complet** de P sur $\mathbb{R}$.

   P est une fonciton polynôme donc P est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{P}'(x) = -3x^2 + 8x - 4$$

   $\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 48 = 16$. P' admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8-4}{-6} = 2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8+4}{-6} = \frac{2}{3}$$

   $\mathrm{P}(2) = -8 + 16 - 8 + 2 = 2$ et $\mathrm{P}\left(\dfrac{2}{3}\right) = -\dfrac{8}{27} + \dfrac{16}{9} - \dfrac{8}{3} + 2 = \dfrac{-8+48-72+54}{27} = \dfrac{22}{27}$

   d'où :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
$\mathrm{P}'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\mathrm{P}(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{22}{27}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

3. Expliquer pourquoi l'équation $P(x) = 0$ n'admet pas de solution dans l'intervalle $]-\infty; 2]$.

P est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty; \frac{2}{3}\right]$ puis strictement croissante sur l'intervalle $\left[\frac{2}{3}; 2\right]$ donc P admet un minimum en $\frac{2}{3}$, ainsi :

$$\forall x \leq 2, P(x) \geq \frac{22}{27} > 0$$

Par conséquent $P(x) \neq 0$ pour tout $x \leq 2$ et l'équation $P(x) = 0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $]-\infty; 2]$.

4. Démontrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$. On note α cette solution.

Sur l'intervalle $[2; +\infty[$ on a :

- P est une fonction polynôme donc P est continue sur $\mathbb{R}$.
- P est strictement décroissante sur $[2; +\infty[$
- Sur $[2; +\infty[$ P est à valeurs dans $]-\infty; 2]$ et $0 \in]-\infty; 2]$.

D'après le corollaire du TVI l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[2; +\infty[$.
On déduit de la question précédente que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

5. A l'aide de la calculatrice déterminer α à 10^{-1} près.

$P(2,8) > 0$ et $P(2,9) < 0$ donc $\alpha \simeq 2,8$.

6. Déterminer le tableau de signe de la fonction P.

Sur l'intervalle $]-\infty; 2]$ $P(x) > 0$ et sur l'intervalle $[2; +\infty[$ P est une fonction strictement décroissante qui s'annule en α, par conséquent :

- $P > 0$ sur $]\infty; \alpha[$.
- $P(x) = 0$ pour $x = \alpha$.
- $P < 0$ sur $]\alpha; +\infty[$

d'où :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	