Nom : …………… **Prénom :** …………… Classe :……

INTERROGATION N°5

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1. (10 points)

On considère les fonctions f et g définies par :

- $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{2 - x}$ pour $x \neq 2$.
- $g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ pour $x \neq 0$.

1. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

   On transforme l'expression $f(x)$ (because FI) :
   Pour tout $x \neq 0$:

$$f(x) = \frac{x^2\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x\left(\frac{2}{x} - 1\right)} = x\frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x} - 1}$$

   On a :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x} - 1} = \frac{1}{-1} = -1$$

   Et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ donc par produit on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

   De même comme $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ on a par produit :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

   (b) Peut-on en déduire l'existence d'une asymptote pour la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ en $\pm\infty$?

   Les limites en $\pm\infty$ de f valent $\pm\infty$ on ne peut donc pas en déduire l'existence d'asymptote horizontale.

2. Montrer que pour tout $x > 0$ on a :

$$-\frac{1}{x} \leq g(x) \leq \frac{1}{x}$$

$$\forall x > 0, \qquad -1 \leq \sin x \leq 1 \iff -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

   En déduire la limite de g en $+\infty$.

   On a $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x} = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}$ donc d'après le théorème des gendarmes on a :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

   Peut-on en déduire l'existence d'une asymptote pour la représentation graphique $\mathscr{C}_g$ en $+\infty$?

   Du résultat précédent on déduit que $\mathscr{C}_g$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

3. Déterminer, en vous inspirant de la question précédente, la limite de g en $-\infty$ et en déduire l'existence d'une asymptote à $\mathscr{C}_g$ en $-\infty$ que l'on précisera.

   On refait la même chose mais pour $x < 0$, ce qui donne :

$$\forall x < 0, \qquad -1 \leq \sin x \leq 1 \iff -\frac{1}{x} \geq \frac{\sin x}{x} \geq \frac{1}{x}$$

   On a $\lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{1}{x} = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x}$ donc d'après le théorème des gendarmes on a :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$$

   On en déduit que $\mathscr{C}_g$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$.

4. (a) Etablir le tableau de signe de $2 - x$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$2 - x$		$+$	0	$-$	

(b) En déduire les limites de f en 2^+ puis en 2^- ; en déduire l'existence d'asymptote à $\mathscr{C}_f$ que l'on précisera.
D'après le tableau de signe précédent lorsque $x > 2$ on a $2 - x < 0$ par conséquent :

$$\lim_{x \to 2^+} 2 - x = 0^-$$

De plus $\lim\limits_{x \to 2^+} x^2 - x + 1 = 4 - 2 + 1 = 3$, par quotient on obtient alors :

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$$

De même, lorsque $x < 2$ on a $2 - x > 0$ donc :

$$\lim_{x \to 2^-} 2 - x = 0^+$$

De plus $\lim\limits_{x \to 2^-} x^2 - x + 1 = 4 - 2 + 1 = 3$, par quotient on obtient alors :

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$$

On en déduit l'existence d'une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

5. (a) Pour tout $x \neq 2$ calculer $f'(x)$.
Pour tout $x \neq 2$ f est dérivable et on a :

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(2-x) - (-1) \times (x^2 - x + 1)}{(2-x)^2} = \frac{4x - 2x^2 - 2 + x + x^2 - x + 1}{(2-x)^2} = \frac{-x^2 + 4x - 1}{(2-x)^2}$$

(b) Etudier le signe de $f'(x)$ en fonction de x.
Pour tout $x \neq 2$, $(2-x)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x^2 + 4x - 1$, polynôme dont nous allons dresser le tableau de signe.
$\Delta = 16 - 4 = 12$, ce polynôme admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{12}}{-2} = 2 - \sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad x_2 = 2 + \sqrt{3}$$

On obtient alors le tableau de signe de f' :

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		2		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

(c) Dresser le tableau de variation complet de f sur $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$.
On déduit du tableau de signe de la dérivée :

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		2		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(2-\sqrt{3})$	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	$f(2+\sqrt{3})$	$\searrow$	$-\infty$

Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

Interrogation n°5

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1. (10 points)

On considère les fonctions f et g définies par :

- $f(x) = \dfrac{-x^2+x+1}{x-1}$ pour $x \neq 1$.
- $g(x) = \dfrac{\cos x + 1}{x}$ pour $x \neq 0$.

1. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

   On transforme l'expression $f(x)$ (because FI) :
   Pour tout $x \neq 0$:
   $$f(x) = \frac{x^2\left(-1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)} = x\frac{-1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}}$$
   On a :
   $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}} = \frac{-1}{1} = -1$$
   Et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ donc par produit on obtient :
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$
   De même comme $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ on a par produit :
   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

   (b) Peut-on en déduire l'existence d'une asymptote pour la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ en $\pm\infty$?

   Les limites en $\pm\infty$ de f valent $\pm\infty$ on ne peut donc pas en déduire l'existence d'asymptote horizontale.

2. Montrer que pour tout $x > 0$ on a :
   $$0 \leq g(x) \leq \frac{2}{x}$$
   $$\forall x > 0, \qquad -1 \leq \cos x \leq 1 \iff 0 \leq \cos x + 1 \leq 2 \iff 0 \leq \frac{\cos x + 1}{x} \leq \frac{2}{x}$$
   En déduire la limite de g en $+\infty$.

   On a $\lim\limits_{x\to+\infty} 0 = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x}$ donc d'après le théorème des gendarmes on a :
   $$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$
   Peut-on en déduire l'existence d'une asymptote pour la représentation graphique $\mathscr{C}_g$ en $+\infty$?

   Du résultat précédent on déduit que $\mathscr{C}_g$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

3. Déterminer, en vous inspirant de la question précédente, la limite de g en $-\infty$ et en déduire l'existence d'une asymptote à $\mathscr{C}_g$ en $-\infty$ que l'on précisera.

   On refait la même chose mais pour $x < 0$, ce qui donne :
   $$\forall x < 0, \qquad -1 \leq \cos x \leq 1 \iff 0 \leq \cos x + 1 \leq 2 \iff 0 \geq \frac{\cos x + 1}{x} \geq \frac{2}{x}$$
   On a $\lim\limits_{x\to-\infty} 0 = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{x}$ donc d'après le théorème des gendarmes on a :
   $$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$$
   On en déduit que $\mathscr{C}_g$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$.

4. (a) Etablir le tableau de signe de $x - 1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

(b) En déduire les limites de f en 1^+ puis en 1^- ; en déduire l'existence d'asymptote à $\mathscr{C}_f$ que l'on précisera.

D'après le tableau de signe précédent lorsque $x > 1$ on a $x - 1 > 0$ par conséquent :

$$\lim_{x \to 1^+} x - 1 = 0^+$$

De plus $\lim_{x \to 1^+} -x^2 + x + 1 = -1 + 1 + 1 = 1$, par quotient on obtient alors :

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$$

De même, lorsque $x < 1$ on a $x - 1 < 0$ donc :

$$\lim_{x \to 1^-} x - 1 = 0^-$$

De plus $\lim_{x \to 1^-} -x^2 + x + 1 = -1 + 1 + 1 = 1$, par quotient on obtient alors :

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$$

On en déduit l'existence d'une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

5. (a) Pour tout $x \neq 1$ calculer $f'(x)$.

Pour tout $x \neq 1$ f est dérivable et on a :

$$f'(x) = \frac{(-2x+1)(x-1) - 1 \times (-x^2 + x + 1)}{(x-1)^2} = \frac{-2x^2 + 2x + x - 1 + x^2 - x - 1}{(x-1)^2} = \frac{-x^2 + 2x - 2}{(x-1)^2}$$

(b) Etudier le signe de $f'(x)$ en fonction de x.

Pour tout $x \neq 1$, $(x-1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x^2 + 2x - 2$, polynôme dont nous allons dresser le tableau de signe.

$\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$, ce polynôme n'admet pas de racine donc il est de signe constant. Ici on a pour tout $x \neq 1$, $-x^2 + x + 1 < 0$. On obtient alors le tableau de signe de f' :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$-$	

(c) Dresser le tableau de variation complet de f sur $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$.

On déduit du tableau de signe de la dérivée :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\|$	$\searrow$	$-\infty$