Correction de l'interrogation n°4

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1. (10 points)

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on considère les points :

$$A(1;3;0) \quad B(2;5;1) \quad \text{et} \quad C(-3;4;2)$$

1. (a) Montrer que (ABC) est un plan.

(ABC) est un plan si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
Or, $\overrightarrow{AB}(1;2;1)$ et $\overrightarrow{AC}(-4;1;2)$.
Pour passer de $z_{\overrightarrow{AB}}$ à $z_{\overrightarrow{AC}}$ on multiplie par 2, en revanche pour passer de $y_{\overrightarrow{AB}}$ à $y_{\overrightarrow{AC}}$ on multiplie par $0,5$. Ce constat prouve qu'il n'existe pas de réel t tel que $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont donc pas colinéaires, par conséquent (ABC) est un plan.

(b) Déterminer une représentation paramétrique du plan (ABC)

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ forment un couple de vecteurs directeurs du plan (ABC).

$$M(x;y;z) \in (ABC) \Longleftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \text{ et } \exists t' \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} + t'\overrightarrow{AC}$$

Par conséquent :

$$M(x;y;z) \in (ABC) \Longleftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \text{ et } \exists t' \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{lcl} x-1 & = & t-4t' \\ y-3 & = & 2t+t' \\ z & = & t+2t' \end{array}\right. , \quad t \in \mathbb{R} \text{ et } t' \in \mathbb{R}$$

Une représentation paramétrique du plan (ABC) est donc :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t-4t'+1 \\ y & = & 2t+t'+3 \\ z & = & t+2t' \end{array}\right. , \quad t \in \mathbb{R} \text{ et } t' \in \mathbb{R}$$

2. On considère la droite d dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -2-t \\ y & = & -2t \\ z & = & -1-t \end{array}\right. , \quad t \in \mathbb{R}$$

(a) Le point $N(-8;6;-7)$ appartient-il à d ?

Si $N \in d$ alors $-8 = -2-t \Longleftrightarrow -6 = -t \Longleftrightarrow t = 6$.
Remplaçons t par 6 dans la représentation paramétrique de d.
$y = -12$ et $z = -1-6 = -7$.
L'ordonnée de N n'étant pas égale à -12 on conclut que $N \notin d$.

(b) Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de d.

D'après le cours, en lisant la représentation paramétrique de d, le vecteur $\vec{u}(-1;-2;-1)$ dirige la droite d.

(c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

Premièrement $\overrightarrow{AB}(1;2;1)$ dirige la droite (AB), par conséquent :

$$M(x;y;z) \in (AB) \Longleftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} \Longleftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{lcl} x-1 & = & t \\ y-3 & = & 2t \\ z & = & t \end{array}\right.$$

Une représentation paramétrique de (AB) est alors :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t+1 \\ y & = & 2t+3 \\ z & = & t \end{array}\right. , \quad t \in \mathbb{R}$$

(d) Etudier les positions relatives de d et (AB).

$\vec{u}(-1;-2:-1)$ dirige d et $\overrightarrow{AB}(1;2;1)$ dirige (AB), de plus $\vec{u} = -\overrightarrow{AB}$ donc $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, on en déduit que :

$$d // (AB)$$

Vérifions si $A \in d$, $1 = -2-t \Longleftrightarrow t = -3$. Dans ce cas $y = -2 \times (-3) = 6$, or $y_A \neq 6$ donc $A \notin d$.
On en déduit que d et (AB) sont strictement parallèles.

3. Déterminer l'équation de la sphère $\mathscr{S}$ de centre C et de rayon BC.
$\mathrm{BC} = \sqrt{(-3-2)^2+(4-5)^2+(2-1)^2} = \sqrt{25+1+1} = \sqrt{27}$.

$$\mathrm{M}(x;y;z) \in \mathscr{S} \iff \mathrm{CM} = \mathrm{BC} \iff \mathrm{CM}^2 = \mathrm{BC}^2 \iff (x+3)^2+(y-4)^2+(z-2)^2 = 27$$

Une équation cartésienne de la sphère $\mathscr{S}$ est donc :

$$(x+3)^2+(y-4)^2+(z-2)^2 = 27$$

Correction de l'interrogation n°4

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1. (10 points)

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les points :

$$A(1;-3;-1) \qquad B(2;-5;1) \qquad \text{et} \qquad C(3;4;-2)$$

1. (a) Montrer que (ABC) est un plan.

   (ABC) est un plan si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
   Or, $\overrightarrow{AB}(1;-2;2)$ et $\overrightarrow{AC}(2;7;-1)$.
   Pour passer de $x_{\overrightarrow{AB}}$ à $x_{\overrightarrow{AC}}$ on multiplie par 2, en revanche pour passer de $z_{\overrightarrow{AB}}$ à $z_{\overrightarrow{AC}}$ on multiplie par $-0,5$. Ce constat prouve qu'il n'existe pas de réel t tel que $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB}$.
   Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont donc pas colinéaires, par conséquent (ABC) est un plan.

   (b) Déterminer une représentation paramétrique du plan (ABC)

   $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ forment un couple de vecteurs directeurs du plan (ABC).

$$M(x;y;z) \in (ABC) \iff \exists t \in \mathbb{R} \text{ et } \exists t' \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} + t'\overrightarrow{AC}$$

   Par conséquent :

$$M(x;y;z) \in (ABC) \iff \exists t \in \mathbb{R} \text{ et } \exists t' \in \mathbb{R}, \begin{cases} x-1 &= t+2t' \\ y+3 &= -2t+7t' \\ z+1 &= 2t-t' \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \text{ et } t' \in \mathbb{R}$$

   Une représentation paramétrique du plan (ABC) est donc :

$$\begin{cases} x &= t+2t'-1 \\ y &= -2t+7t'-3 \\ z &= 2t-t'-1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \text{ et } t' \in \mathbb{R}$$

2. On considère la droite d dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x &= -2-t \\ y &= 2t \\ z &= -1-2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

   (a) Le point $N(-4;4;-5)$ appartient-il à d ?

   Si $N \in d$ alors $-4 = -2-t \iff -2 = -t \iff t = 2$.
   Remplaçons t par 2 dans la représentation paramétrique de d.
   $y = 4$ et $z = -1-4 = -5$.
   Au final lorsque $t = 2$ on retrouve les coordonnées de N donc $N \in d$.

   (b) Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de d.

   D'après le cours, en lisant la représentation paramétrique de d, le vecteur $\vec{u}(-1;2;-2)$ dirige la droite d.

   (c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

   Premièrement $\overrightarrow{AB}(1;-2;2)$ dirige la droite (AB), par conséquent :

$$M(x;y;z) \in (AB) \iff \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x-1 &= t \\ y+3 &= -2t \\ z+1 &= 2t \end{cases}$$

   Une représentation paramétrique de (AB) est alors :

$$\begin{cases} x &= t+1 \\ y &= -2t-3 \\ z &= 2t-1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

   (d) Etudier les positions relatives de d et (AB).

   $\vec{u}(-1;2:-2)$ dirige d et $\overrightarrow{AB}(1;-2;2)$ dirige (AB), de plus $\vec{u} = -\overrightarrow{AB}$ donc $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, on en déduit que :

$$d // (AB)$$

   Montrons que $A \notin d$, $1 = -2-t \iff t = -3$. Dans ce cas $y = -2 \times (-3) = 6$, or $y_A \neq 6$ donc $A \notin d$.
   On en déduit que d et (AB) sont strictement parallèles.

3. Déterminer l'équation de la sphère $\mathscr{S}$ de centre C et de rayon BC.
$\text{BC} = \sqrt{(3-2)^2 + (4+5)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{1+81+9} = \sqrt{91}$.

$$\text{M}(x;y;z) \in \mathscr{S} \iff \text{CM} = \text{BC} \iff \text{CM}^2 = \text{BC}^2 \iff (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z+2)^2 = 91$$

Une équation cartésienne de la sphère $\mathscr{S}$ est donc :

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z+2)^2 = 91$$