CORRECTION DE L'INTERROGATION N°3

Exercice 1. (4 points)

On considère la suite u définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = 2n + n \times (-1)^n$$

1. Déterminer, à l'aide du théorème de comparaison, la limite de la suite u.

   On a :

   $$-1 \leq (-1)^n \leq 1$$

   De ce simple constat on tire que :

   $$-n \leq n \times (-1)^n \leq n$$

   d'où l'encadrement de u_n :

   $$2n - n \leq 2n + n \times (-1)^n \leq 2n + n(-1)^n \iff n \leq u_n \leq 2n + n(-1)^n$$

   Enfin comme $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ on a, d'après le théorème de comparaison :

   $$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

2. La suite est-elle monotone ? (*on justifiera cette réponse*).

   $u_0 = 0$, $u_1 = 2 - 1 = 1$, $u_2 = 6$, $u_3 = 3$. Le calcul de ces termes suffit à justifier que la suite n'est pas monotone.

Exercice 2. (6 points)

On considère la suite u définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n,

$$u_{n+1} = \sqrt{4u_n + 5}$$

1. Calculer u_1 ; u_2 et u_3. Que peut-on conjecturer sur la suite u ?

   $u_1 = 3$, $u_2 = \sqrt{17}$ et $u_3 = \sqrt{4\sqrt{17} + 5}$.

   En utilisant une calculatrice et en lisant un peu les questions suivantes il est probable que cette suite soit croissante, majorée par 5 et donc converge vers on espère 5.

2. (a) Montrer, par récurrence la propriété $\mathscr{P}$ définie au rang n par :

   $$\mathscr{P}(n) : 0 < u_n < 5$$

   - ***Initialisation*** : pour $n = 0$:
     $u_0 = 1$ et 1 est effectivement un nombre strictement positif et un nombre strictement inférieur à 5.
     $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - ***Hérédité*** : Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $0 < u_n < 5$ et montrons que $0 < u_{n+1} < 5$.
     On a :

     $$\begin{aligned} & 0 < u_n < 5 \\ \iff & 0 < 4u_n < 20 \\ \iff & 5 < 4u_n + 5 < 25 \\ \iff & \sqrt{5} < \sqrt{4u_n + 5} < 5 \qquad \text{car la fonction racine carré est strictement croissante sur } [5; +\infty[\\ \iff & 0 < \sqrt{5} < u_{n+1} < 5 \end{aligned}$$

     Ainsi dès que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. La propriété $\mathscr{P}$ est héréditaire.
   - ***Conclusion*** : $\mathscr{P}$ est initialisée à partir de $n = 0$ et est héréditaire donc :

     $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n < 5$$

   (b) Montrer, par récurrence que la suite u est strictement croissante.

   Notons C pour croissante la propriété définie au rang n par :

   $$\mathrm{C}(n) : u_n < u_{n+1}$$

   - ***Initialisation*** : pour $n = 0$:
     On a : $u_0 = 1$ et $u_1 = 3$, on a bien $u_0 < u_1$ donc $\mathscr{C}(0)$ est vraie.

- ***Hérédité*** : Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $u_n < u_{n+1}$, montrons que $u_{n+1} < u_{n+2}$ On a :

$$\begin{array}{ll} & u_n < u_{n+1} \\ \iff & 4u_n < 4u_{n+1} \\ \iff & 4u_n + 5 < 4u_{n+1} + 5 \\ \iff & \sqrt{4u_n + 5} < \sqrt{4u_{n+1} + 5} \qquad \text{car la fonction racine carré est strictement croissante sur } [0; +\infty[\\ \iff & u_{n+1} < u_{n+2} \end{array}$$

  Ainsi dès que $\mathscr{C}(n)$ est vraie, $\mathscr{C}(n+1)$ est vraie. La propriété $\mathscr{C}$ est héréditaire.
- ***Conclusion*** : $\mathscr{C}$ est initialisée à partir de $n = 0$ et est héréditaire donc u est une suite strictement croissante.

– En déduire que u converge.
  u est une suite strictement croissante et majorée par 5, donc u converge vers un réel pour l'instant inconnu.

3. **Bonus** : Déterminer la limite ℓ de la suite u.
   u converge vers ℓ donc :

$$u_{n+1} = \sqrt{4u_n + 5} \Longrightarrow u_{n+1}^2 = 4u_n + 5 \Longrightarrow \ell^2 = 4\ell + 5 \Longrightarrow \ell^2 - 4\ell - 5 = 0$$

   $\Delta = b^2 - 4ac = 16 + 20 > 0$, d'où deux solutions :

$$\ell_1 = \frac{4 + \sqrt{36}}{2} = 5 \qquad \text{ou} \qquad \ell_2 = \frac{4 - \sqrt{36}}{2} = -1$$

   Puisque $u_n > 0$ on a :

$$\lim_{n \to +\infty} = 5$$

Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

CORRECTION DE L'INTERROGATION N°3

Exercice 1. (4 points)

On considère la suite u définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{n+\cos n}{n+3} \qquad \text{et} \qquad w_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

1. Déterminer, à l'aide du théorème des gendarmes, la limite de la suite u.

On a :

$$\begin{aligned} & -1 \leq \cos n \leq 1 \\ \iff & n-1 \leq n+\cos n \leq 1+n \\ \iff & \frac{n-1}{n+3} \leq \frac{n+\cos n}{n+3} \leq \frac{n+1}{n+3} \\ \iff & \frac{n-1}{n+3} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n+3} \end{aligned}$$

Or :

$$\frac{n-1}{n+3} = \frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{3}{n}\right)} = \frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}}$$

ce qui converge vers $\frac{1}{1} = 1$.

De même :

$$\frac{n+1}{n+3} = \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{3}{n}\right)} = \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}}$$

ce qui converge vers $\frac{1}{1} = 1$.

Au final :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n+3} = 1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+3}$$

donc d'après le théorème des gendarmes on a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$

2. Déterminer, à l'aide du théorème des gendarmes, la limite de la suite w.

On a :

$$\begin{aligned} & -1 \leq (-1)^n \leq 1 \\ \iff & \frac{-1}{n+1} \leq \frac{(-1)^n}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \\ \iff & \frac{-1}{n+1} \leq w_n \leq \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Comme :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{n+1} = 0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}$$

d'après le théorème des gendarmes on a :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$$

Exercice 2. (6 points)

On considère la suite u définie par $u_0 = -2$ et pour tout entier n,

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}u_n$$

1. Démontrer par récurrence que la suite u est strictement croissante.

Notons C pour croissante la propriété définie au rang n par :

$$C(n) : u_n < u_{n+1}$$

– ***Initialisation*** : pour $n = 0$:
  On a : $u_0 = -2$ et $u_1 = 1 - 2 \times \frac{1}{2} = 0$, on a bien $u_0 < u_1$ donc $\mathscr{C}(0)$ est vraie.

- ***Hérédité*** : Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $u_n < u_{n+1}$, montrons que $u_{n+1} < u_{n+2}$ On a :

$$\begin{aligned} & u_n < u_{n+1} \\ \iff & \frac{1}{2}u_n < \frac{1}{2}u_{n+1} \\ \iff & 1+\frac{1}{2}u_n < \frac{1}{2}u_{n+1}+1 \\ \iff & u_{n+1} < u_{n+2} \end{aligned}$$

  Ainsi dès que $\mathscr{C}(n)$ est vraie, $\mathscr{C}(n+1)$ est vraie. La propriété $\mathscr{C}$ est héréditaire.
- ***Conclusion*** : $\mathscr{C}$ est initialisée à partir de $n=0$ et est héréditaire donc u est une suite strictement croissante.
- En déduire que u converge.
  u est une suite strictement croissante et majorée par 5, donc u converge vers un réel pour l'instant inconnu.

2. Montrer, par récurrence, la propriété $\mathscr{P}$ définie au rang n par :

$$\mathscr{P}(n) : u_n < 2$$

   - ***Initialisation*** : pour $n=0$ on a $u_0=-2$ qui est bien inférieur strictement à 2.
   - ***Hérédité*** : Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $u_n < 2$ et montrons que $u_{n+1} < 2$.

$$u_n < 2 \iff \frac{1}{2}u_n < 1 \iff \frac{1}{2}u_n + 1 < 2 \iff u_{n+1} < 2$$

     Ainsi dès que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   - ***Conclusion*** : La propriété $\mathscr{P}$ est initialisée à partir de $n=0$ et est héréditaire donc pour tout entier naturel n on a $u_n < 2$.

3. En déduire que u converge.
   u est croissante et majorée par 2 d'après les questions qui précèdent donc u converge.

4. Déterminer la limite ℓ de la suite u.
   En notant ℓ la limite on a, par passage à la limite :

$$u_{n+1} = 1+\frac{1}{2}u_n \iff \ell = 1+\frac{1}{2}\ell \iff \frac{1}{2}\ell = 1 \iff \ell = 2$$