Correction de l'interrogation n°2

Exercice 1. (6 points)

Déterminer la limite de chacune des suites ci-dessous :

1. $u_n = (2n+1)^2$
   On sait que $\lim_{n\to+\infty} 2n+1 = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ donc :
   $$\lim_{n\to+\infty} (2n+1)^2 = +\infty$$
2. $u_n = \dfrac{3}{2\sqrt{n}+5}$
   Comme
   $$\lim_{n\to+\infty} 2\sqrt{n}+5 = +\infty$$
   on a :
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{2\sqrt{n}+5} = 0$$
3. $u_n = \dfrac{4n-1}{n+4}$ est une forme indéterminée (de la forme $\dfrac{\infty}{\infty}$.
   $$\frac{4n-1}{n+4} = \frac{n\left(4-\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{4}{n}\right)} = \frac{4-\frac{1}{n}}{1+\frac{4}{n}}$$
   Enfin comme $\lim_{n\to+\infty} 4-\dfrac{1}{n} = 4$ et $\lim_{n\to+\infty} 1+\dfrac{4}{n} = 1$ on peut conclure par quotient que :
   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = 4$$
4. $u_n = \dfrac{2n^2-5n+3}{n+4} = \dfrac{n^2\left(2-\frac{5}{n}+\frac{3}{n}\right)}{n\left(1+\frac{4}{n}\right)} = n\dfrac{2-\frac{5}{n}+\frac{3}{n}}{1+\frac{4}{n}}$
   Or, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2-\frac{5}{n}+\frac{3}{n}}{1+\frac{4}{n}} = 2$ et $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ par conséquent, par produit :
   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

Exercice 2. (4 points)

On considère la suite u définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = 3 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 5$$

1. Montrer par récurrence que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = -7\times\left(\frac{1}{2}\right)^n + 10$$
   Montrons la propriété $\mathscr{P}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :
   $$\mathscr{P}(n) : u_n = -7\times\left(\frac{1}{2}\right)^n + 10$$
   - *Initialisation* : $u_0 = 3$ d'après l'énoncé et :
     $$-7\times\left(\frac{1}{2}\right)^0 + 10 = 3 = u_0$$
     donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - ***Hérédité*** : Supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que :
     $$u_n = -7\times\left(\frac{1}{2}\right)^n + 10$$
     et montrons que :
     $$u_{n+1} = -7\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 10$$
     D'après l'énoncé on a :
     $$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 5 = \frac{1}{2}\left(-7\times\left(\frac{1}{2}\right)^n + 10\right) + 5 = -7\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 5 + 5 = -7\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 10$$
     Ainsi dès que $\mathscr{P}(n)$ est vraie $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, la propriété $\mathscr{P}$ est donc héréditaire.

– ***Conclusion*** : La propriété $\mathscr{P}$ est initialisée à partir de $n = 0$ et est héréditaire par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = -7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 10$$

2. En déduire que la limite ℓ de la suite u.

   Puisque $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ et donc :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 10$$

Exercice 1. (6 points)

Déterminer la limite de chacune des suites ci-dessous :

1. $u_n = (n-1)^2$
   Puisque $n^2 \mapsto +\infty$ et $n-1 \mapsto +\infty$ on en déduit :
$$\lim_{n\to+\infty} (n-1)^2 = +\infty$$

2. $u_n = \dfrac{1}{5-2\sqrt{n}}$
   Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} 5-2\sqrt{n} = -\infty$ on en déduit que :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{5-2\sqrt{n}} = 0$$

3. $u_n = \dfrac{5n^2+n}{2n^2+4} = \dfrac{n^2\left(5+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(2+\frac{4}{n^2}\right)} = \dfrac{5+\frac{1}{n}}{2+\frac{4}{n^2}}$
   Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} 5+\dfrac{1}{n} = 5$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2+\dfrac{4}{n^2} = 2$ le quotient a pour limite :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5+\frac{1}{n}}{2+\frac{4}{n^2}} = \frac{5}{2}$$

4. $u_n = \dfrac{2n^2-5n+3}{n^5+4} = \dfrac{n^2\left(2-\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(n^3+\frac{4}{n^2}\right)} = \dfrac{2-\frac{5}{n}+\dfrac{3}{n^2}}{n^3+\frac{4}{n^2}}$
   Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} 2-\dfrac{5}{n}+\dfrac{3}{n^2} = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3+\dfrac{4}{n^2} = +\infty$ on a :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

Exercice 2. (4 points)

On considère la suite u définie pour tout entier naturel n par :
$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 5$$

1. Montrer par récurrence que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = -\frac{17}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{20}{3}$$

   Montrons la propriété $\mathscr{P}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :
$$\mathscr{P}(n) : u_n = -\frac{17}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{20}{3}$$

   - ***Initialisation*** : pour $n = 0$:
     $u_0 = 1$ d'après l'énoncé et $-\dfrac{17}{3}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^0 + \dfrac{20}{3} = 1$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - ***Hérédité*** : Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $u_n = -\dfrac{17}{3}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n + \dfrac{20}{3}$ et montrons que
$$u_{n+1} = -\frac{17}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} + \frac{20}{3}$$
     D'après l'énoncé on a :
$$u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 5 = \frac{1}{4}\left(-\frac{17}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{20}{3}\right) + 5 = -\frac{17}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} + \frac{20}{12} + 5 = -\frac{17}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} + \frac{80}{12} = -\frac{17}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} + \frac{20}{3}$$
     Ainsi dès que $\mathscr{P}(n)$ est vraie $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, la propriété est donc héréditaire.
   - ***Conclusion*** : La propriété $\mathscr{P}$ est initialisée à partir de $n = 0$ et est héréditaire par conséquent :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = -\frac{17}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{20}{3}$$

2. En déduire que la limite ℓ de la suite u.

Puisque $-1 < \dfrac{1}{4} < 1$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$ et donc :

$$\ell = \lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{20}{3}$$