Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

Correction de l'interrogation n°20

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1. (10 points)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée.

Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. **Proposition 1**

   Toute suite positive croissante tend vers $+\infty$.

   Une suite positive croissante peut être majorée par un nombre réel M auquel cas elle converge vers un nombre réel $\ell \leq \mathrm{M}$.

   Par exemple $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ est une suite de réel positif, puisque $\dfrac{1}{n} \leq 1$ pour $n \geq 1$ donc $u_n \geq 0$.

   De plus, pour $n \geq 1$:

   $$u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{1}{n+1} - 1 + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$$

   Ainsi cet suite est croissante.

   Enfin elle est majorée par 1, et par ailleurs sa limite vaut 1.

2. g est la fonction définie sur $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ par

   $$g(x) = 2x\ln(2x+1).$$

   Proposition 2

   Sur $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$, l'équation $g(x) = 2x$ a une unique solution : $\dfrac{\mathrm{e}-1}{2}$.

   $x = 0$ est une autre solution de cet équation, effectivement $2 \times 0 = 0$ et $2 \times 0 \times \ln(2 \times 0 + 1) = 0$, donc la proposition 2 est fausse.

   Proposition 3

   Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ est : $1 + \ln 4$.

   Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de g au points d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ est $g'\left(\dfrac{1}{2}\right)$ que nous allons déterminer.

   $$g'(x) = (2x)'\ln(2x+1) + 2x(\|n(2x+1))' = 2\ln(2x+1) + 2x \times \frac{(2x+1)'}{2x+1} = 2\ln(2x+1) + \frac{4x}{2x+1}$$

   $$g'\left(\frac{1}{2}\right) = 2\ln(2\times 0,5+1) + \frac{2}{2} = 2\ln 2 + 1 = \ln(2^2) + 1 = \ln 4 + 1$$

   La proposition 3 est donc vraie.

3. L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

   $\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$ sont les plans d'équations respectives : $2x + 3y - z - 11 = 0$ et $x + y + 5z - 11 = 0$.

   Proposition 4

   Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$ se coupent perpendiculairement.

   $\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$ se coupent perpendiculairement si et seulement si un vecteur normal de $\mathscr{P}$ est orthogonal à un vecteur normal de $\mathscr{R}$.

   $\vec{n}(2;3;-1)$ est un vecteur normal de $\mathscr{P}$, et $\overrightarrow{n'}(1;1;5)$ est un vecteur normal de $\mathscr{R}$, de plus :

   $$\vec{n} \cdot \vec{n'} = 2 + 3 - 5 = 0$$

   Ainsi $\vec{n} \perp \vec{n'} \Longrightarrow \mathscr{P} \perp \mathscr{R}$. La proposition 4 est donc vraie.