Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

CORRECTION DE L'INTERROGATION N°1

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1. (6 points)

On considère la suite u définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = 3 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = 3u_n + 2$$

Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 4 \times 3^n - 1$$

Soit la propriété $\mathscr{P}$ définie au rang n par :

$$\mathscr{P}(n) : u_n = 4 \times 3^n - 1$$

Démontrons la par récurrence.

- ***Initialisation*** : $u_0 = 3$ et $4 \times 3^0 - 1 = 4 - 1 = 3$, ainsi $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- ***Hérédité*** : On suppose qu'il existe un entier n tel que :

  $$u_n = 4 \times 3^n - 1$$

  Montrons que $u_{n+1} = 4 \times 3^{n+1} - 1$.
  Puisque $u_{n+1} = 3u_n + 2$ on a :

  $$u_{n+1} = 3(4 \times 3^n - 1) + 2 = 4 \times 3^{n+1} - 3 + 2 = 4 \times 3^{n+1} - 1$$

  Ainsi dès lors que $\mathscr{P}(n)$ est vraie $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- ***Conclusion*** : La propriété $\mathscr{P}$ est vraie au rang 0 et est héréditaire. On en déduit que :

  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 4 \times 3^n - 1$$

Exercice 2. (4 points)

1. Traduire par une phrase en français la « phrase mathématique » suivante :

   $$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \text{ on ait : } \sqrt{n} > A$$

   Pour tout réel A strictement positif, il existe un entier naturel N tel que quelque soit l'entier n supérieur ou égal à N on ait la racine carrée de cet entier n strictement supérieur au réel A.
2. On considère la suite u définie pour tout entier naturel n par :

   $$u_n = \sqrt{n}$$

   (a) Pour A = 10, déterminer le plus petit entier naturel N tel que $u_N > A$
   On cherche le plus petit entier N tel que :

   $$u_N > 10 \iff \sqrt{N} > 10 \iff N > 100$$

   Le plus petit de ces entiers est donc N = 101.

   (b) Même question pour A = 1500.
   On cherche le plus petit entier N tel que :

   $$u_N > 1500 \iff \sqrt{N} > 1500 \iff N > 1500^2 \iff N > 250000$$

   Le plus petit de ces entiers est donc N = 250001.

Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

CORRECTION DE L'INTERROGATION N°1

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1. (6 points)

On considère la suite u définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = 8 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$$

1. Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 1$$

Montrons par récurrence la propriété $\mathscr{P}$ définie au rang n par :

$$u_n > 1$$

- ***Initialisation*** :
  Puisque $u_0 = 8 > 1$ la propriété $\mathscr{P}$ est vraie au rang 0.
- ***Hérédité*** : Supposons qu'il existe un entier n tel que $u_n > 1$ et montrons alors que $u_{n+1} > 1$:
  On a :
  $$u_n > 1 \iff u_n + 1 > 2 \iff \sqrt{u_n + 1} > \sqrt{2} \iff u_{n+1} > \sqrt{2}$$
  Or $\sqrt{2} > 1$ donc $u_{n+1} > 1$.
  Ainsi dès lors que $\mathscr{P}(n)$ est vraie $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- ***Conclusion*** : La propriété $\mathscr{P}$ est initialisée à partir de $n = 0$ et est héréditaire on en déduit que :
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 1$$

2. Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} < u_n$$

Montrons par récurrence la propriété $\mathscr{P}$ définie au rang n par :

$$u_{n+1} < u_n$$

- ***Initialisation*** : pour $n = 0$ il s'agit de vérifier que $u_{0+1} < u_0 \iff u_1 < u_0$
  Or, $u_1 = \sqrt{8+1} = 3$ et on a bien $u_1 < u_0$, la propriété $\mathscr{P}$ est donc vraie pour $n = 0$.
- ***Hérédité*** : Supposons qu'il existe un entier n tel que $u_{n+1} < u_n$ et montrons que dans ce cas $u_{n+2} < u_{n+1}$.
  On a donc :
  $$u_{n+1} < u_n \iff u_{n+1} + 1 < u_n + 1 \iff \sqrt{u_{n+1} + 1} < \sqrt{u_n + 1} \iff u_{n+2} < u_{n+1}$$
  Ici on peut considérer la racine carrée de $u_n + 1$ pour tout n puisque d'après la question 1. $u_n > 1 > 0$
  Ainsi dès lors que $\mathscr{P}(n)$ est vraie $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- ***Conclusion*** : La propriété $\mathscr{P}$ est initialisée pour $n = 0$ et est héréditaire, on en déduit que
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} < u_n$$
  On vient de démontrer que la suite u est strictement décroissante.

Exercice 2. (4 points)

1. Traduire par une phrase en français la « phrase mathématique » suivante :

$$\forall \mathrm{A} > 0, \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \forall n \geq \mathrm{N} \text{ on ait : } n^2 > \mathrm{A}$$

Pour tout réel A strictement positif, il existe un entier naturel N tel que pour tout entier n supérieur ou égal à l'entier N on ait le carré de n strictement supérieur à A.

2. On considère la suite u définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = n^2$$

Pour $\mathrm{A} = 150$, déterminer le plus petit entier naturel N tel que $u_\mathrm{N} > \mathrm{A}$

On cherche le plus petit entier N tel que :

$$u_n > 150 \iff n^2 > 150 \iff n > \sqrt{150} \simeq 12$$

Ainsi le plus petit entier naturel qui convient est $\mathrm{N} = 13$.