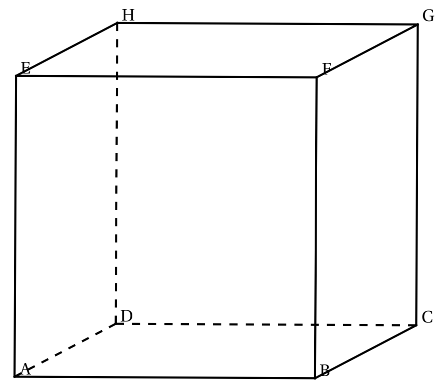
Nom : …………… **Prénom :** …………… Classe :……

INTERROGATION N°19

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1. (4 points)

On considère le cube ABCDEFGH ci-dessous de côté a.



1. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DG}$ d'au moins deux manières différentes.
   $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ donc :
   $$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DG}=DC\times DG\times\cos\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DG}\right)$$
   Or, en appliquant Pythagore dans le triangle rectangle DCG on trouve que DG $=\sqrt{2}a$, d'où :
   $$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DG}=\sqrt{2}a\times a\times\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}a^2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=a^2$$
   Toujours en utilisant le fait que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DG}$, le projeté orthogonal de $\overrightarrow{DG}$ sur $\overrightarrow{DC}$ est $\overrightarrow{DC}$, par conséquent :
   $$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DC}=DC^2=a^2$$
2. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$.
   Puisque $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$ on a :
   $$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$$
3. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG}$ en utilisant les résultats précédents.
   $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DG}$ donc :
   $$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DG}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DG}=0+a^2=a^2$$

Exercice 2. (6 points)

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x)=x\mathrm{e}^{1-x}.$$

1. Vérifier que pour tout réel x, $f(x)=\mathrm{e}\times\frac{x}{\mathrm{e}^x}$.
   Pour tout réel x on a :
   $$f(x)=xe^{1-x}=xe\times e^{-x}=xe\times\frac{1}{e^x}=e\times\frac{x}{e^x}$$
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.
   On sait d'après le cours que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ par conséquent :
   $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0\Longrightarrow\lim_{x\to+\infty}e\frac{x}{e^x}=0\times e=0\Longrightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$
   La représentation graphique de f admet donc une asymptote horizontale d'équation $y=0$ en $+\infty$.
3. Déterminer la dérivée de la fonction f puis etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et enfin dresser le tableau de variation.
   f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a :
   $$f'(x)=(x)'e^{1-x}+x\left(e^{1-x}\right)'=e^{1-x}+x\times(1-x)'e^{1-x}=e^{1-x}-xe^{1-x}=e^{1-x}(1-x)$$
   On sait que pour tout réel x $e^{1-x}>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1-x$ d'où on déduit immédiatement :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	0

4. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{F}(x) = e^{1-x}(ax+b)$. Déterminer les réels a et b tels que F soient une primitive de f.
   F est une primitive de f si et seulement si $\mathrm{F}' = f$ c'est-à-dire :

$$-e^{1-x}(ax+b) + ae^{1-x} = f(x) \Longleftrightarrow e^{1-x}(-ax-b+a) = xe^{1-x} \Longleftrightarrow -ax-b+a = x \Longleftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ -b+a = 0 \Leftrightarrow b = -1 \end{cases}$$

   F est donc une primitive de f si et seulement si :

$$\mathrm{F}(x) = e^{1-x}(-x-1)$$

5. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$. Interpréter graphiquement.
   $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = [\mathrm{F}(x)]_0^1 = \mathrm{F}(1) - \mathrm{F}(0) = e^{1-1}(-1-1) - e^{1-0}(-0-1) = -2+e = e-2$
   Puisque $f(x) \geq 0$ lorsque $x \in [0;1]$ (cf tableau de variation), cet intégrale est l'aire du domaine délimité par la représentation graphique de f, l'axe des abscisses, celui des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$, exprimé en unité d'aire.

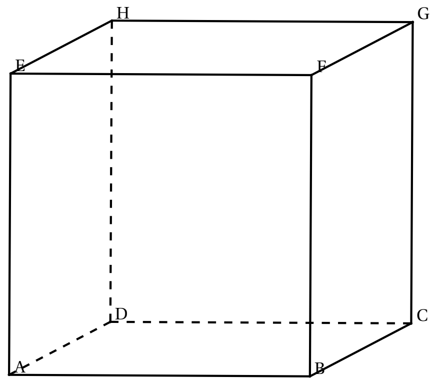
Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

INTERROGATION N°19

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1. (5 points)

On considère le cube ABCDEFGH ci-dessous de côté a.



1. Calculer $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DG}$ d'au moins deux manières différentes.
   D'après Pythagore, dans le triangle DCG rectangle en C on trouve :
   $$\mathrm{DG} = \sqrt{2}a$$
   ce qui permet de déduire :
   $$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DG} = \mathrm{DC} \times \mathrm{DG} \times \cos\left(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DG}\right) = \sqrt{2}a \times a \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}a^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$$
   En utilisant le fait que $\overrightarrow{DC}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{DG}$ sur $\overrightarrow{DC}$ on obtient :
   $$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DC} = \mathrm{DC}^2 = a^2$$
2. Calculer $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{GF}$.
   $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{HG} \perp \overrightarrow{GF}$, par conséquent :
   $$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{HG} \cdot \overrightarrow{GF} = 0$$
3. Calculer $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DF}$ en utilisant les résultats précédents.
   $$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DC} \cdot \left(\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GF}\right) = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{GF} = a^2 + 0 = a^2$$

Exercice 3. (points)

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{1-x^2}.$$

1. Vérifier que pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \frac{e}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$.
   Pour tout réel $x > 0$ on a :
   $$f(x) = xe^{1-x^2} = xee^{-x^2} = xe \times \frac{1}{e^{x^2}} = e \times \frac{x}{e^{x^2}} = \frac{e}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$$
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.
   On sait d'après le cours que :
   $$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$
   Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ donc par composition :
   $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2} = 0}$$
   De plus $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e}{x} = 0$ par conséquent, par produit :
   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$
   La représentation graphique de f admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

3. Déterminer la dérivée de la fonction f puis étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$ et enfin dresser le tableau de variation.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^+$ et on a :

$$f'(x) = e^{1-x^2} + x \times -2x \times e^{1-x^2} = e^{1-x^2}\left(1-2x^2\right)$$

Or, pour tout réel x on a $e^{1-x^2} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1-2x^2$ qui est un polynôme de degré 2 admet pour racine $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, donc une seule racine sur l'intervalle $[0;+\infty[$ ce qui donne :

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$1-2x^2$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

4. Déterminer une primitive de f sur $[0;+\infty[$.
Pour tout réel $x \geq 0$:

$$f(x) = \frac{-2xe^{1-x^2}}{-2}$$

ainsi f est de la forme $u'e^u/(-2)$ donc une primitive de f est de la forme $e^u/(-2)$ c'est-à-dire :

$$\mathrm{F}(x) = \frac{e^{1-x^2}}{-2}$$

5. Calculer $\int_0^1 f(x)dx$. Interpréter graphiquement.
$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = [\mathrm{F}(x)]_0^1 = \mathrm{F}(1) - \mathrm{F}(0) = \frac{e^{1-1}}{-2} - \frac{e^{1-0}}{-2} = -\frac{1}{2} + \frac{e}{2} = \frac{e-1}{2}$.
Puisque $f(x) \geq 0$ sur $[0;1]$ cet intégrale est l'aire du domaine délimité par la représentation graphique de f, l'axe des ordonnées, celui des abscisses et la droite d'équation $x = 1$ exprimé en unité d'aire.