Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

INTERROGATION N°18

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1. (10 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = xe^{-x}$$

PARTIE A.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Interpréter graphiquement.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

Or, $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$, par quotient on obtient :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

De plus on sait d'après le cours que $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ par conséquent $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0$ ce qui implique que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

On en déduit que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 0$.

2. (a) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ est du signe de $1-x$.

En tant que produit de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a :

$$f'(x) = e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$$

Puisque pour tout réel x on sait que $e^x > 0$, il suit que $e^{-x} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Le signe de $f'(x)$ dépends donc uniquement du signe de $1-x$.

(b) En déduire le tableau de variation complet de f.

$1 - x > 0 \iff 1 > x$ d'où :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

3. Etudier le signe de $f(x)$ lorsque $x \in \mathbb{R}$.

$f(x) = \frac{x}{e^x}$, or $e^x > 0$ pour tout réel x, par conséquent le signe de $f(x)$ dépends de celui de x d'où :

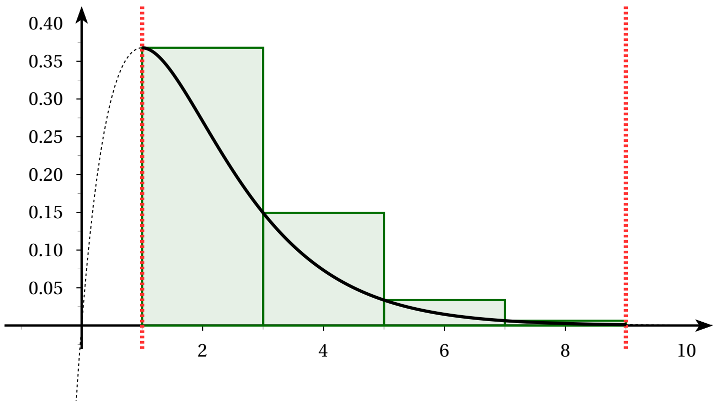
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

PARTIE B.

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal.

Soit $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 9$.

On utilise l'algorithme suivant pour calculer, par la méthode des rectangles, une valeur approchée de l'aire $\mathscr{A}$. (voir la figure ci-après).



Algorithme :

Variables

k et n sont des entiers naturels

U est un nombre réel

Initialisation

U := 0 et n := 4

Traitement

Pour k allant de 0 à $n-1$

U := U + $2f(1+2k)$

Fin pour

Affichage

Afficher U.

1. Qu'affiche l'algorithme, en déduire une valeur approchée de l'aire $\mathscr{A}$.
   Pour $k = 0$, $1+2k = 1$ et donc la variable U vaut $0+2(1e^{-1}) = 2e^{-1}$.
   Pour $k = 1$, $1+2k = 3$ et donc la variable U vaut $2e^{-1}+6e^{-3}$.
   Pour $k = 2$, $1+2k = 5$ et donc la variable U vaut $2e^{-1}+6e^{-3}+10e^{-5}$.
   Enfin pour $k = 3$, $1+2k = 7$ et donc la variable U vaut : $2e^{-1}+6e^{-3}+10e^{-5}+14e^{-7}$
   L'algorithme affiche donc le réel $2e^{-1}+6e^{-3}+10e^{-5}+14e^{-7}$ qui corresponds à l'aire des 4 rectangles verts et qui est une valeur approchée de $\mathscr{A}$.
2. Modifier l'algorithme pour qu'il calcule une valeur approchée de l'aire $\mathscr{A}$ à l'aide de n rectangles de même largeur. On précisera la largeur de ces rectangles en fonction de n.

   Si on divise l'intervalle $[1;9]$ à l'aide de n rectangles de même largeur alors chacun aura une largeur de $\dfrac{9-1}{n} = \dfrac{8}{n}$ ce pourquoi on réécrit l'algorithme de la manière suivante :

Algorithme :

Variables

k et n sont des entiers naturels

U est un nombre réel

Initialisation

U := 0 **Traitement**

Pour k allant de 0 à $n-1$

U := U + $\dfrac{8}{n}f\left(1+\dfrac{8}{n}k\right)$

Fin pour

Affichage

Afficher U.

PARTIE C.

1. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$\mathrm{F}(x) = e^{-x}(-x-1)$$
   Calculer $\mathrm{F}'(x)$. Que peut-on en déduire ?
   La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a :
   $$\mathrm{F}'(x) = -e^{-x}(-x-1)+e^{-x}\times(-1) = xe^{-x}+e^{-x}-e^{-x} = xe^{-x} = f(x)$$
   La fonction F est donc une primitive de f.
2. En déduire la valeur exacte de $\mathscr{A}$.
   D'après la partie A, on sait que $f(x) > 0$ sur l'intervalle $[1;9]$ donc :
   $$\mathscr{A} = \int_1^9 f(x)dx = [\mathrm{F}(x)]_1^9 = \mathrm{F}(9)-\mathrm{F}(1) = -10e^{-9}-(-2e^{-1}) = 2e^{-1}-10e^{-9}\,u.a$$

Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

INTERROGATION N°18

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1. (10 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 e^{-x}$$

PARTIE A.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Interpréter graphiquement.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :
   $$f(x) = \frac{x^2}{e^x}$$
   Or, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$, par quotient on obtient :
   $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$
   De plus on sait d'après le cours que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ par conséquent $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^2}} = 0$ ce qui implique que :
   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$
   On en déduit que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 0$.

2. (a) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ est du signe de $2x - x^2$.
   En tant que produit de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a :
   $$f'(x) = 2xe^{-x} + x^2 \times (-e^{-x}) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2)$$
   Puisque pour tout réel x on sait que $e^x > 0$, il suit que $e^{-x} > 0$, $\quad \forall x \in \mathbb{R}$. Le signe de $f'(x)$ dépends donc uniquement du signe de $2x - x^2$.

   (b) En déduire le tableau de variation complet de f.
   $2x - x^2 = 0 \iff x(2-x) = 0 \iff x = 0 \quad$ ou $\quad x = 2$ d'où :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$2x - x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0

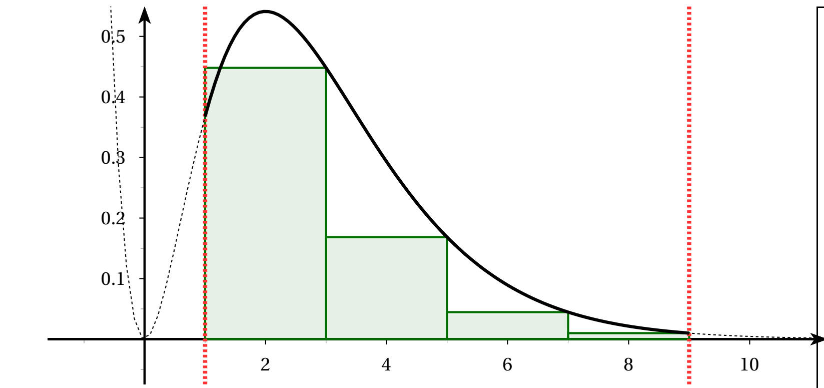
3. Etudier le signe de $f(x)$ lorsque $x \in \mathbb{R}$.
   $e^{-x} > 0$ pour tout réel x et $x^2 > 0$ pour tout réel $x \neq 0$ donc $f(x) > 0$ pour tout réel $x \neq 0$, enfin $f(0) = 0$.

PARTIE B.

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal.

Soit $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 9$.

On utilise l'algorithme suivant pour calculer, par la méthode des rectangles, une valeur approchée de l'aire $\mathscr{A}$. (voir la figure ci-après).



Algorithme :

Variables

k et n sont des entiers naturels

U est un nombre réel

Initialisation

U := 0 et n := 4

Traitement

Pour k allant de 0 à $n-1$

U := U + $2f(3+2k)$

Fin pour

Affichage

Afficher U.

1. Qu'affiche l'algorithme, en déduire une valeur approchée de l'aire $\mathscr{A}$.
   Pour $k = 0$, $3+2k = 3$ et donc la variable U vaut $0+2(9e^{-3}) = 18e^{-3}$.
   Pour $k = 1$, $3+2k = 5$ et donc la variable U vaut $18e^{-1}+2\times 25e^{-5}$.
   Pour $k = 2$, $3+2k = 7$ et donc la variable U vaut $18e^{-3}+50e^{-5}+2\times 49e^{-7}$.
   Enfin pour $k = 3$, $3+2k = 9$ et donc la variable U vaut : $18e^{-3}+50e^{-5}+98e^{-7}+162e^{-9}$
   L'algorithme affiche donc le réel $18e^{-3}+50e^{-5}+98e^{-7}+162e^{-9}$ qui corresponds à l'aire des 4 rectangles verts et qui est une valeur approchée de $\mathscr{A}$.
2. Modifier l'algorithme pour qu'il calcule une valeur approchée de l'aire $\mathscr{A}$ à l'aide de n rectangle de même largeur. On précisera la largeur de ces rectangles en fonction de n.
   Si on divise l'intervalle $[1;9]$ à l'aide de n rectangles de même largeur alors chacun aura une largeur de $\dfrac{9-1}{n} = \dfrac{8}{n}$ ce pourquoi on réécrit l'algorithme de la manière suivante :

Algorithme :

Variables

k et n sont des entiers naturels

U est un nombre réel

Initialisation

U := 0 **Traitement**

Pour k allant de 0 à $n-1$

U := U + $\dfrac{8}{n}f\left(3+\dfrac{8}{n}k\right)$

Fin pour

Affichage

Afficher U.

PARTIE C.

1. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\mathrm{F}(x) = e^{-x}(-x^2-2x-2)$$
   Calculer $\mathrm{F}'(x)$. Que peut-on en déduire? F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a :
$$\mathrm{F}'(x) = -e^{-x}(-x^2-2x-2)+e^{-x}(-2x-2) = x^2e^{-x}+2xe^{-x}+2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x} = x^2e^{-x} = f(x)$$
   On en déduit que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire la valeur exacte de $\mathscr{A}$.
   D'après la partie A, $f(x) > 0$ pour $x \in [1;9]$ par conséquent :
$$\mathscr{A} = \int_1^9 f(x)dx = [\mathrm{F}(x)]_1^9 = \mathrm{F}(9)-\mathrm{F}(1) = e^{-9}(-81-18-2)-e^{-1}(-1-2-2) = 5e^{-1}-101e^{-9}u.a$$