Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

CORRECTION DE L'INTERROGATION N°17

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1. (10 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

PARTIE A. **Etude d'une fonction auxiliaire.**

1. On considère la fonction N définie pour tout x de l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par

$$\mathrm{N}(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$$

Calculer les limites de N en -1 et en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+x = +\infty$. De plus on sait que $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$, par conséquent :

$$\lim_{x\to+\infty}(1+x)^2 - 1 + \ln(1+x) = +\infty$$

De plus :

$$\lim_{x\to-1}(1+x)^2 - 1 = 0 - 1 = -1$$

et $\lim\limits_{x\to-1^+} 1+x = 0^+$, puis on sait que $\lim\limits_{X\to 0^+} \ln X = -\infty$ on en déduit par composition que $\lim\limits_{x\to-1^+} \ln(1+x) = -\infty$ puis somme que :

$$\lim_{x\to-1} \mathrm{N}(x) = -\infty$$

2. Calculer $\mathrm{N}'(x)$ puis dresser le tableau de variation de la fonction N sur $]-1;+\infty[$.

La fonction N est dérivable sur $]-1;+\infty[$ en tant que somme et composée de fonction dérivable, de plus pour $x > -1$ on a :

$$\mathrm{N}'(x) = 2(1+x)\times 1 - 0 + \frac{(1+x)'}{1+x} = 2 + 2x + \frac{1}{1+x}$$

Si $x > -1$ alors $x+1 > 0$ donc $\dfrac{1}{x+1} > 0$. De plus si $x > -1$ alors $x+1 > 0$ et donc $2(x+1) > 0 \iff 2x+2 > 0$. La somme de deux nombres strictement positif étant strictement positive on obtient :

$$2 + 2x + \frac{1}{1+x} > 0 \iff \mathrm{N}'(x) > 0$$

On en déduit que N est une fonction strictement croissante sur $]-1;+\infty[$ d'où :

x	-1	$+\infty$
$\mathrm{N}'(x)$	$+$	
$\mathrm{N}(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3. Montrer que l'équation $\mathrm{N}(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]-1;+\infty[$. Vérifier que $\alpha = 0$.

N est une fonction continue sur $]-1;+\infty[$ (puisque dérivable sur cet intervalle), N est strictement croissante sur cet intervalle et est à valeurs dans $]-\infty;+\infty[$, ce dernier intervalle contient 0 donc l'équation $\mathrm{N}(x) = 0$ admet d'après une conséquence du TVI une unique solution dans l'intervalle $]-1;+\infty[$. De plus :

$$\mathrm{N}(0) = 1 - 1 + \ln 1 = 0$$

L'unique solution de l'équation $\mathrm{N}(x) = 0$ est donc $x = 0$, ainsi $\alpha = 0$.

4. Dresser le tableau de signe de la fonction N.

Puisque la fonction N est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$ et que $\mathrm{N}(0) = 0$ il vient que $\mathrm{N}(x) < 0 \iff -1 < x < 0$ et $\mathrm{N}(x) > 0 \iff x > 0$, par conséquent :

x	-1		0		$+\infty$
$\mathrm{N}(x)$		$-$	0	$+$	

PARTIE B. **Etude de la fonction f.**

1. On note $g(x) = \dfrac{\ln(1+x}{1+x}$, Calculer $g'(x)$ pour $x > -1$ puis montrer que pour tout $x > -1$ on a :

$$f'(x) = \frac{\mathrm{N}(x)}{(1+x)^2}$$

Pour $x > -1$ on a :

$$g'(x) = \frac{(\ln(1+x)' \times (1+x) - \ln(1+x) \times 1}{(1+x)^2} = \frac{\frac{1}{1+x} \times (1+x) - \ln(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}$$

Par conséquent

$$f'(x) = 1 - g'(x) = 1 - \frac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{(1+x)^2}{(1+x^2)} - \frac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{1+x^2-1+\ln(1+x)}{(1+x)^2}$$

2. En déduire le tableau de signe de f' et le tableau de variation de f.
Le dénominteur de f' est un carré donc pour $x > -1$ on a $(1+x)^2 > 0$, ainsi f' est du signe du numérateur qui vaut $\mathrm{N}(x)$. On connait le signe de $\mathrm{N}(x)$ on en déduit :

x	-1		0		$+\infty$
$\mathrm{N}(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(0) = 0$	$\nearrow$	

3. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x$. Calculer les coordonnées du point d'intersection de la répresentation graphique $\mathscr{C}_{\{}$ de la fonction f et de la droite $\mathscr{D}$.
On résout, pour $x > -1$,

$$f(x) = x \Longleftrightarrow x - \frac{\ln(1+x)}{1+x} = x \Longleftrightarrow -\frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0 \Longleftrightarrow \frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0 \Longleftrightarrow \ln(1+x) = 0 \Longleftrightarrow 1+x = e^0 \Longleftrightarrow x = 1-1 = 0$$

Le point d'intersection de la répresentation graphique $\mathscr{C}_{\{}$ de la fonction f et de la droite $\mathscr{D}$ a pour coordonnées $(0,0)$.

PARTIE C. **Etude d'une suite**

textbfOn admet que cette suite converge vers un réel $\ell > -1$.

1. Pour montrer qu'une suite est convergente que démontre-t-on « habituellement ».
Il est fréquent que l'on démontre que la suite est strictement croissante et majorée, ou alors qu'elle est strictement décroissante et minorée. Une telle chose, une fois démontrée prouve en effet que la suite est convergente.

2. Déterminer la valeur de ℓ.
On a $u_{n+1} = f(u_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, par passage à la limite comme f est une fonction continue sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ on a :

$$\ell = f(\ell)$$

Or, l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $x = 0$ donc ℓ qui est solution de cette équation vaut 0, ce qui permet de conclure que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

CORRECTION DE L'INTERROGATION N°17

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1. (10 points)

Soit f et g les fonction définies sur $]1;+\infty[$ par $f(x)=\ln(x-1)$ et $g(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$. On note respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leur courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm).

Partie A : Étude du sens de variation de f et de celui de g

1. Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$ Les fonctions f et g sont dérivables sur l'intervalle $]1;+\infty[$ et :

$$f'(x)=\frac{(x-1)'}{x-1}=\frac{1}{x-1} \qquad \text{et} \qquad g'(x)=\frac{1\times(x-1)-(x-2)\times 1}{(x-1)^2}=\frac{x-1-x+2}{(x-1)^2}=\frac{1}{(x-1)^2}$$

2. Étudier le sens de variation de chacune des fonctions f et g ; dresser leur tableau de variations complet.
Si $x>1$ alors $x-1>0$ donc $f'(x)>0$ et f est strictement croissante sur $]1;+\infty[$.
Si $x>1$ alors $(x-1)^2>0$ donc $g'(x)>0$ et g est aussi strictement croissante sur $]1;+\infty[$.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln X=+\infty$, par composition on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty}\ln(x-1)=+\infty$$

De même comme $\lim\limits_{x\to1^+} x-1=0^+$ et $\lim\limits_{X\to0^+}\ln X=-\infty$, par composition on obtient :

$$\lim_{x\to1^+}\ln(x-1)=-\infty$$

On a $\lim\limits_{x\to1^+} x-2=-1$ et $\lim\limits_{x\to1^+} x-1=0^+$, on obtient par quotient :

$$\lim_{x\to1^+} g(x)=-\infty$$

En $+\infty$ il faut transformer l'écriture de $g(x)$:

$$\forall x\neq 1: \qquad g(x)=\frac{x\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{2-\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}}$$

Et on a :

$$\lim_{x\to+\infty} 1-\frac{2}{x}=1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x}=1$$

Par quotient on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=1$$

On obtient alors :

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

et :

x	1		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1

Partie B : Étude des positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$

On considère la fonction d, définie sur $]1;+\infty[$ par $d(x)=f(x)-g(x)$.

1. (a) Calculer $d'(x)$

f et g étant dérivable sur $]1;+\infty[$ leur différence d est dérivable sur $]1;+\infty[$ et on a pour $x>1$:

$$d'(x)=f'(x)-g'(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{x-1-1}{(x-1)^2}=\frac{x-2}{(x-1)^2}$$

(b) Étudier le sens de variation de d et donner son tableau de variations $(x-1)^2>0$ sur $]1;+\infty[$ donc d' est du signe de $x-2$ d'où :

x	1		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	
$d(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

(c) Calculer $d(2)$

$d(2)=f(2)-g(2)=\ln 1-\dfrac{0}{1}=0-0=0.$

En déduire le signe de $d(x)$, lorsque $x\in]1;+\infty[$ d est strictement croissante sur $]1;2]$ et strictement croissante sur $[2;+\infty[$, d admet donc un minimum en 2 qui est $d(2)=0$, par conséquent :

$$\forall x\in]1;+\infty[,\qquad d(x)\geq 0$$

2. En utilisant les résultats précédents :

(a) Montrer que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont un seul point commun, noté A, dont on donnera les coordonnées

On cherche à résoudre $f(x)=g(x)\iff f(x)-g(x)=0\iff d(x)=0$, or d'après le tableau de variation $d(x)=0\iff x=2$, donc $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont un unique point commun qui a pour abscisse 2 et pour ordonnée :

$$f(2)=\ln(2-1)=\ln 1=0$$

L'unique point commun de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ a pour coordonnée $\mathrm{A}(2;0)$.

(b) Montrer que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ admettent au point A la même tangente $\mathscr{T}$, dont on donnera l'équation réduite

L'équation de la tangente en a est :

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

Ici $a=2$ et $f'(2)=\dfrac{1}{2-1}=1$ et $f(2)=\ln(2-1)=0$. Par conséquent l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2 est :

$$y=x-2$$

De plus $g'(2)=\dfrac{1}{(2-1)^2}=1$ et $g(2)=\dfrac{2-2}{2-1}=0$ donc l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 2 est :

$$y=x-2$$

$\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont donc une même tangente au point d'abscisse 2.

(c) étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$

On a démontré que pour tout $x>1$, $d(x)\geq 0\iff f(x)-g(x)\geq 0\iff f(x)\geq g(x)$ et si de plus $x\neq 2$ on a $f(x)>g(x)$. On en déduit que si $x=2$ les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont confondues et sinon $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$.