Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

CORRECTION DE L'INTERROGATION N°16

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1. (10 points)

Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= u_n - \ln\left(u_n^2+1\right) \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

PARTIE A.

1. Construire, en utilisant la droite d'équation $y = x$ et la courbe d'équation $y = x - \ln(x^2+1)$, les termes u_0, u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.
2. Que peut-on conjecturer pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   (u_n) semble être une suite décroissante et minorée, par conséquent elle doit converger.

PARTIE B.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln\left(x^2+1\right).$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.

$$f(x) = x \Longleftrightarrow x - \ln(x^2+1) = x \Longleftrightarrow -\ln(x^2+1) = 0 \Longleftrightarrow \ln(x^2+1) = 0 \Longleftrightarrow x^2+1 = e^0 \Longleftrightarrow x^2+1 = 1 \Longleftrightarrow x^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

2. Démontrer que pour $x \in [0;1]$ on a :

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$$

Dresser le tableau de variation complet de f sur $[0;1]$ et déduire que si $x \in [0\ ;\ 1]$ alors $f(x) \in [0\ ;\ 1]$.
Sur $[0;1]$ la fonction f est dérivable et on obtient :

$$f'(x) = 1 - \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} = 1 - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x^2+1-2x}{x^2+1} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$$

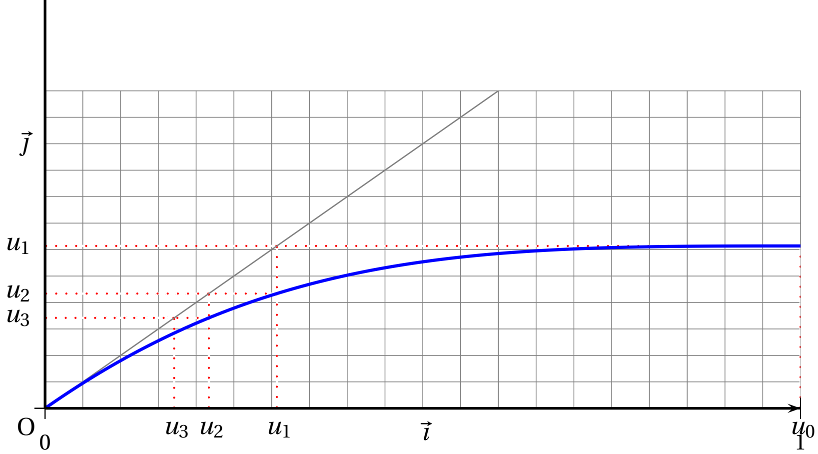
$x^2+1 \geq 1$ donc $f'(x)$ est du signe de $(x-1)^2$ qui est positif ou nul (en $x = 1$) puisqu'il s'agit d'un carré.
Par conséquent f est strictement croissante sur $[0;1]$. On a donc :

$$0 \leq x \leq 1 \Longrightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(1)$$

Or, $f(0) = 0 - \ln(1) = 0$ et $f(1) = 1 - \ln 2 < 1$, par conséquent $f(x) \in [0;1]$ pour tout réel x de l'intervalle $[0;1]$.

PARTIE C.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n \in [0\ ;\ 1]$.
   Notons $\mathscr{P}(n) : 0 \leq u_n \leq 1$.
   – *Initialisation* : pour $n = 0$:
   $$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad 0 \leq u_0 \leq 1$$
   donc la propriété $\mathscr{P}$ est initialisée à partir de $n = 0$.
   – *Hérédité* : Supposons qu'il existe un entier n tel que $0 \leq u_n \leq 1$ et montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.
   et donc $f(u_n) \in [0;1]$ d'après la question 2 de la partie B. Par conséquent on vient de démontrer que $u_{n+1} \in [0;1]$.
   – *Conclusion* : La propriété $\mathscr{P}$ est initialisée à partir de $n = 0$ et est héréditaire donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Étudier le sens de variation de la suite (u_n). On a :
   $$u_{n+1} - u_n = u_n - \ln(u_n^2+1) - u_n = -\ln(u_n^2+1)$$
   Comme $u_n^2 > 0$ il vient que $u_n^2 + 1 > 1$, par conséquent :
   $$\ln(u_n^2+1) > \ln 1 \Longleftrightarrow \ln(u_n^2+1) > 0 \Longleftrightarrow -\ln(u_n^2+1) < 0 \Longleftrightarrow u_{n+1} - u_n < 0 \Longleftrightarrow u_{n+1} < u_n$$
   La suite (u_n) est donc strictement décroissante.
3. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. Déterminer sa limite.
   La suite (u_n) est strictement décroissante d'après la question précédente et est minorée par 0 (on l'a déjà démontré), par conséquent elle converge vers un réel $\ell \geq 0$ qui vérifie (puisque $u_{n+1} = f(u_n)$ et car f est continue sur $[0;1]$) :
   $$\ell = f(\ell)$$
   Or, l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $x = 0$ d'après la première question de la partie B. ℓ étant solution de cette équation il vient que :
   $$\ell = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$



$\vec{j}$
u_1
u_2
u_3
O
0
u_3
u_2
u_1
$\vec{\imath}$
u_0
1