Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

CORRECTION DE L'INTERROGATION N°15

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1. (4 points)

1. Montrer que pour tout réel x on a :
$$\sqrt{x^2+1}-x>0 \qquad \text{et} \qquad \sqrt{x^2+1}+x>0$$

   Pour tout réel x on a :
$$x^2+1>x^2 \Longrightarrow \sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}$$
   Puisque $\sqrt{x^2}=|x|\geq \pm x$ on obtient :
$$\sqrt{x^2+1}>\pm x$$
   ce qui donne :
$$\sqrt{x^2+1}>x \qquad \text{et} \qquad \sqrt{x^2+1}>-x$$
   On conclut alors que pour tout réel x on a :
$$\sqrt{x^2+1}-x>0 \qquad \text{et} \qquad \sqrt{x^2+1}+x>0$$

2. Montrer que pour tout réel x on a :
$$\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)=1$$

   Pour tout réel x on a (identité remarquable) :
$$\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\sqrt{x^2+1}^2-x^2=x^2+1-x^2=1$$

3. Montrer que pour tout réel x on a :
$$\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)+\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=0$$

   Pour tout réel x on a :
$$\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)+\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\ln\left[\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\right]=\ln 1=0$$

Exercice 2. (6 points)

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :
$$f(x)=x-\ln(1+x)$$

1. Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in[0;+\infty[$.
   f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\geq 0$ on a :
$$f'(x)=1-\frac{(1+x)'}{1+x}=1-\frac{1}{1+x}=\frac{1+x-1}{1+x}=\frac{x}{1+x}$$

2. Dresser le tableau de variation de la fonction f. Sur $[0;+\infty[$, on a $1+x>0$ et $x\geq 0$, donc $f'(x)\geq 0$ d'où :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	

   On a $f(0)=0-\ln(1+0)=0-\ln 1=0-0=0$

3. En déduire que pour tout réel $x\geq 0$ on a :
$$\ln(1+x)\leq x$$

   f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et $f(0)=0$, par conséquent :
$$\forall x\geq 0, \qquad f(x)\geq 0$$
   on en déduit que :
$$\forall x\geq 0, \qquad x-\ln(1+x)\geq 0$$
   ce qui conduit au résultat voulu :
$$\forall x\geq 0, \qquad x\geq \ln(1+x)$$

4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
On posera $X = 1 + x$ *afin d'utiliser les résultats connus du cours.* Si $X = 1 + x$ alors $x = X - 1$ ce qui donne :

$$f(X) = X - 1 - \ln X = X\left(1 - \frac{1}{X} - \frac{\ln X}{X}\right)$$

Lorsque x tend vers $+\infty$ il en va de même pour X, de plus on sait que :

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X} = 0$$

Par conséquent :

$$\lim_{X\to+\infty} 1 - \frac{1}{X} - \frac{\ln X}{X} = 1$$

Puis comme $\lim\limits_{X\to+\infty} X = +\infty$ on conclut par produit que :

$$\lim_{X\to+\infty} f(X) = +\infty$$

Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

Correction de l'interrogation n°15

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1. (4 points)

1. Dresser le tableau de signe de x^2-2x-3.
   On résout $x^2-2x-3=0$.
   Pour cela on calcule le discriminant $\Delta = 4+12 = 16$ ce qui donne deux racines :
$$x_1 = \frac{2-4}{2} = -1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{2+4}{2} = 3$$
   d'où :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
x^2-2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. En déduire une factorisation de x^2-2x-3.
   Puisque -1 et 3 sont les deux racines du polynôme que nous cherchons à factoriser on a :
$$x^2-2x-3 = (x+1)(x-3)$$
3. Montrer que pour $x>3$, on a :
$$\ln(x^2-2x-3) - 2\ln(x+1) = \ln\left(\frac{x-3}{x+1}\right)$$
   Pour $x>3$, $x^2-2x-3>0$ et $x+1>0$, on peut donc effectuer les calculs proposés :
$$\ln(x^2-2x-3)-2\ln(x+1) = \ln((x+1)(x-3))-2\ln(x+1) = \ln(x+1)+\ln(x-3)-2\ln(x+1) = \ln(x-3)-\ln(x+1) = \ln\left(\frac{x-3}{x+1}\right)$$

Exercice 2. (6 points)

Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$ par :
$$g(x) = x - x\ln x$$
1. Déterminer les limites de la fonction g en 0 et $+\infty$.
   On sait d'après le cours que
$$\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$$
   Puisque $\lim_{x\to 0} x = 0$ il vient par différence que :
$$\lim_{x\to 0} x - x\ln x = 0$$
   De plus
$$g(x) = x(1-\ln x)$$
$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} 1-\ln x = -\infty$$
   Par produit on obtient :
$$\lim_{x\to+\infty} x(1-\ln x) = -\infty$$
2. Montrer que g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculer $g'(x)$.
   g est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que somme et produit de fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x>0$ on a :
$$g'(x) = 1 - \big((x)'\ln x + x(\ln x)'\big) = 1 - \left(\ln x + x\times\frac{1}{x}\right) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x$$
3. Dresser le tableau de variations de la fonction g.
   Tout d'abord observons que $-\ln x > 0 \Longleftrightarrow \ln x < 0 \Longleftrightarrow e^{\ln x} < e^0 \Longleftrightarrow x < 1$, par conséquent :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\parallel$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

4. Résoudre l'équation $g(x) = 0$ puis donner le tableau de signe de g. On a

$$g(x) = 0 \Longleftrightarrow x(1 - \ln x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \qquad \text{ou} \qquad 1 - \ln x = 0$$

Comme la fonction n'est pas définie pour $x = 0$ on a :

$$g(x) = 0 \Longleftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Longleftrightarrow \ln x = 1 \Longleftrightarrow e^{\ln x} = e \Longleftrightarrow x = e$$

Puisque g est strictement croissante sur $]0;1]$ avec $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$ on en déduit que $g(x) > 0$ pour tout $x \in]0;1]$. De plus puisque g est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$ avec $g(1) = 1$ et $g(e) = 0$ on en déduit que :

- $g(x) > 0$ sur $]0;e[$
- $g(x) = 0 \Longleftrightarrow x = e$
- $g(x) < 0$ sur $]e;+\infty[$

d'où :

x	0		e		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	