Nom : . . . . **Prénom :** . . . . Classe :. . . . . .

Correction de l'interrogation n°14

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

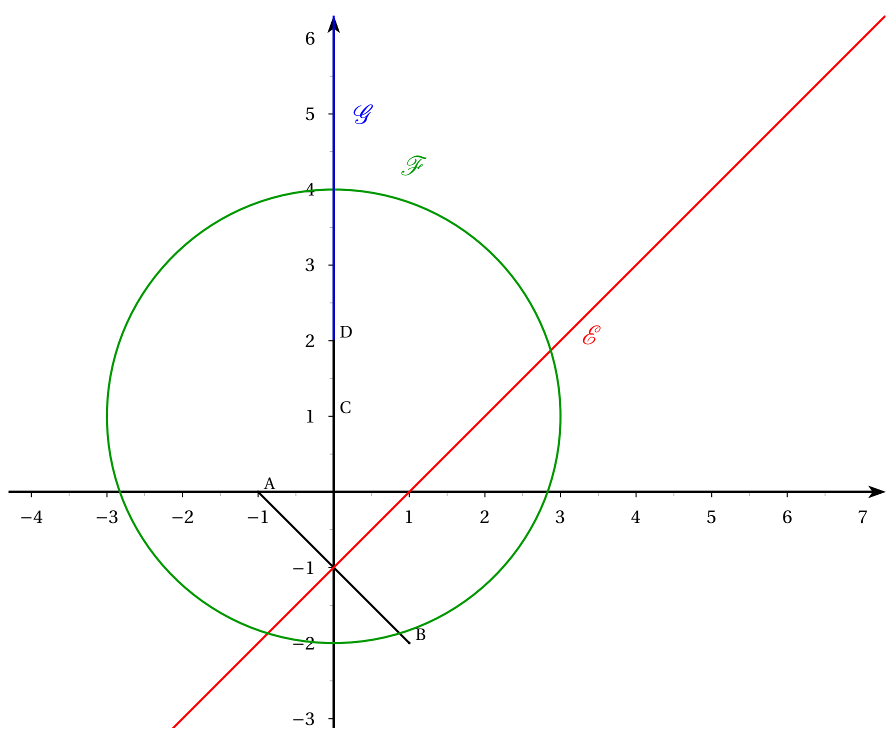
Exercice 1. (5 points)

1. Déterminer et représenter l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixes z du plan vérifiant :
$$|z+1| = |z-1+2i|$$
On note $z_A = -1$ et $z_B = 1-2i$ on a alors :
$$|z_M - z_A| = |z_M - z_B| \Longleftrightarrow AM = MB$$
M est donc un point de la médiatrice du segment [AB], donc $\mathscr{E}$ est la médiatrice du segment [AB].

2. Déterminer et représenter l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M d'affixes z du plan z vérifiant :
$$|z-i| = 3$$
On note $z_C = i$, dans ce cas on a :
$$|z_M - z_C| = 3 \Longleftrightarrow CM = 3$$
M est donc un point du cercle de centre C et de rayon 3.

3. Déterminer et représenter l'ensemble $\mathscr{G}$ des points M d'affixes z du plan vérifiant :
$$arg(z-2i) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$
On note $z_D = 2i$, dans ce cas on a :
$$arg(z_M - z_D) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \Longleftrightarrow \left(\vec{u};\overrightarrow{DM}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$
M est donc un point de l'axe des ordonnées ayant une ordonnée supérieure strictement à 2.

4. On considère les nombres complexes z_1 et z_2 d'affixes $z_1 = \sqrt{7}e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $z_2 = iz_1$
   (a) Ecrire z_1 sous forme algébrique.
$$z_1 = \sqrt{7}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{7}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{21}}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i$$
   (b) Ecrire z_2 sous forme exponentielle.
   Puisque $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ on a :
$$z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}} \times \sqrt{7}e^{-i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{7}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)} = \sqrt{7}e^{i\frac{\pi}{3}}$$



Exercice 2. (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. On considère l'application f du plan dans lui même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M$'$ d'affixe z' telle que : $z' = z^2$. On note Ω le point d'affixe $z_\Omega = 1$.

1. (a) Calculer l'image de z_Ω par f.
   $z'_\Omega = 1^2 = 1$.

   (b) Déterminer l'ensemble des nombres complexes qui ont la même image par f.
   On cherche les nombres complexes z tels que

$$z' = z \Longleftrightarrow z^2 = z \Longleftrightarrow z^2 - z = 0 \Longleftrightarrow z(z-1) = 0 \Longleftrightarrow z = 0 \qquad \text{ou} \qquad z = 1$$

2. Soit A le point d'affixe $a = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

   (a) Déterminer la forme exponentielle de a.

$$a = \sqrt{2} - i\sqrt{2} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

   (b) Déterminer le module et un argument des nombres complexes z vérifiant $z^2 = a$.
   On cherche $|z|$ tel que

$$|z^2| = |a| \Longleftrightarrow |z|^2 = 2 \Longleftrightarrow |z| = \sqrt{2}$$

   On cherche $arg(z)$ tel que :

$$arg(z^2) = arg(a)[2\pi]$$

   ce qui donne (puisque $arg(z^n) = n arg(z)$:

$$2arg(z) = -\frac{\pi}{4}[2\pi] \Longleftrightarrow arg(z) = -\frac{\pi}{8}[\pi] \Longleftrightarrow arg(z) = -\frac{\pi}{8}[2\pi] \qquad \text{ou} \qquad arg(z) = -\frac{\pi}{8} + \pi[2\pi] = \frac{7\pi}{8}[2\pi]$$

   (c) En déduire l'écriture exponentielle des deux antécédents de a par f.
   D'après la question précédente il existe deux nombres complexes tels que $z^2 = a$, par ailleurs de même module qui sont :

$$z_1 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{8}} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{8}}$$

Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

Correction de l'interrogation n°14

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1. (5 points)

1. Déterminer et représenter l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M d'affixes z du plan z vérifiant :

$$|z+1| = 3$$

On note $z_A = -1$, dans ce cas on a :

$$|z_M - z_A| = 3 \Longleftrightarrow AM = 3$$

M est donc un point du cercle de centre A et de rayon 3.

2. Déterminer et représenter l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixes z du plan vérifiant :

$$|z-i| = |z+1-2i|$$

On note $z_B = i$ et $z_C = -1+2i$ on a alors :

$$|z_M - z_B| = |z_M - z_C| \Longleftrightarrow BM = CM$$

M est donc un point de la médiatrice du segment [BC], donc $\mathscr{E}$ est la médiatrice du segment [BC].

3. Déterminer et représenter l'ensemble $\mathscr{G}$ des points M d'affixes z du plan vérifiant :

$$arg(z-2) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

On note $z_D = 2$, dans ce cas on a :

$$arg(z_M - z_D) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \Longleftrightarrow \left(\vec{u};\overrightarrow{DM}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

M est donc un point de la demi-droite d'équation $x = 2$ avec $y > 0$.

4. On considère les nombres complexes z_1 et z_2 d'affixes $z_1 = \sqrt{7}e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = -2z_1$

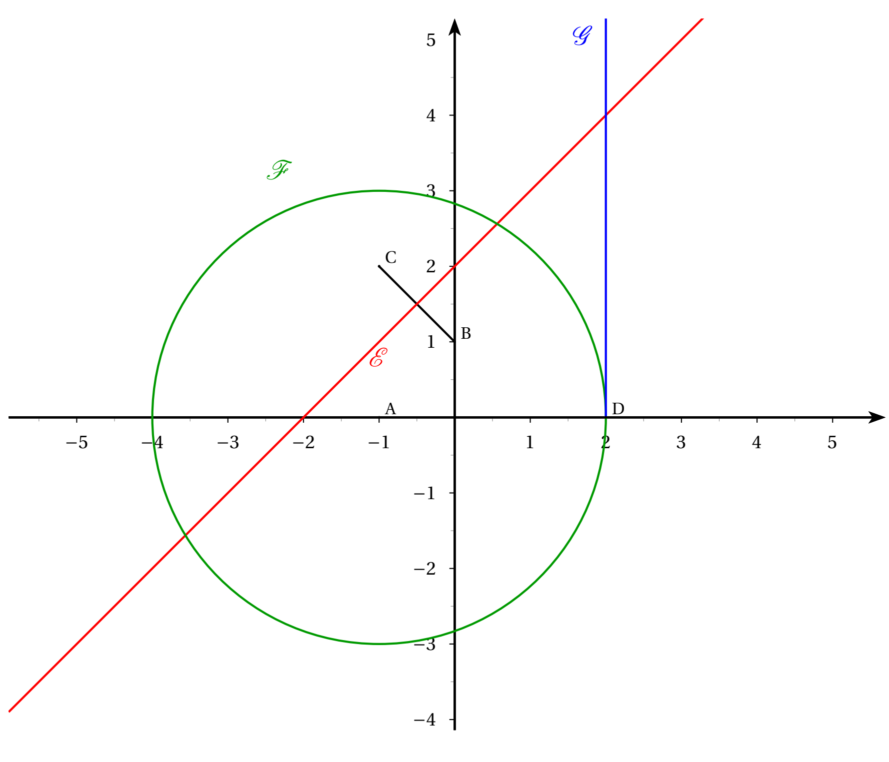
(a) Ecrire z_1 sous forme algébrique.

$$z_1 = \sqrt{7}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \sqrt{7}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2}i$$

(b) Ecrire z_2 sous forme exponentielle.

Puisque $-1 = e^{i\pi}$ on a :

$$z_2 = 2e^{i\pi} \times \sqrt{7}e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{7}e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)} = 2\sqrt{7}e^{i\frac{4\pi}{3}}$$



<u>Exercice</u> 2. (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. On considère l'application f du plan dans lui même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M$'$ d'affixe z' telle que : $z' = z^3$. On note Ω le point d'affixe $z_\Omega = 1$.

1. (a) Calculer l'image de z_Ω par f.
   $z'_\Omega = 1^3 = 1.$

   (b) Déterminer l'ensemble des nombres complexes qui ont la même image par f.
   On cherche les nombres complexes z tels que

$$z' = z \Longleftrightarrow z^3 = z \Longleftrightarrow z^3 - z = 0 \Longleftrightarrow z(z^2-1) = 0 \Longleftrightarrow z = 0 \quad \text{ou} \quad z^2 = 1 \Longleftrightarrow z = 0 \quad \text{ou} \quad z = \pm 1$$

2. Soit A le point d'affixe $a = 4\sqrt{2} + 4i\sqrt{2}$.

   (a) Déterminer une forme exponentielle de a.

$$a = 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 8\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 8e^{i\frac{\pi}{4}}$$

   (b) Déterminer le module et un argument des nombres complexes z vérifiant $z^3 = a$.
   On cherche $|z|$ tel que

$$|z^3| = |a| \Longleftrightarrow |z|^3 = 8 \Longleftrightarrow |z| = 2$$

   On cherche $arg(z)$ tel que :

$$arg(z^3) = arg(a)[2\pi]$$

   ce qui donne (puisque $arg(z^n) = narg(z)$:

$$3arg(z) = \frac{\pi}{4}[2\pi] \Longleftrightarrow arg(z) = \frac{\pi}{12}[2\pi/3] \Longleftrightarrow arg(z) = \frac{\pi}{12}[2\pi] \quad \text{ou} \quad arg(z) = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}[2\pi] = \frac{9\pi}{12}[2\pi] \quad \text{ou} \quad arg(z) = -\frac{7\pi}{12}$$

   (c) En déduire le nombre d'antécédents de a par f. On donnera l'écriture exponentielle de chacun des antécédents.
   D'après la question précédente il existe trois nombres complexes tels que $z^3 = a$, par ailleurs de même module qui sont :

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{12}} \quad \text{et} \quad z_2 = 2e^{i\frac{9\pi}{12}} \quad \text{et} \quad z_3 = 2e^{-i\frac{7\pi}{12}}$$