Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

Correction de l'interrogation n°12

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1. (5 points)

On considère les deux nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 + i \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}i$$

1. Préciser les parties réelles et imaginaires de z_1 et z_2.

$$\Re e z_1 = 1 = \Im m z_1 \qquad \text{et} \qquad \Re e z_2 = \frac{1}{3} \qquad \text{enfin} \qquad \Im m z_2 = -\frac{1}{2}$$

2. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants. Donner leurs parties réelles et imaginaires.

(a) $z_1 + z_2 = 1 + i + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}i = \frac{4}{3} + \frac{1}{2}i$. Par conséquent :

$$\Re e z_1 + z_2 = \frac{4}{3} \qquad \text{et} \qquad \Im m z_1 + z_2 = \frac{1}{2}$$

(b) $z_1 - z_2 = 1 + i - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}i = \frac{2}{3} + \frac{3}{2}i$. Par conséquent :

$$\Re e z_1 - z_2 = \frac{2}{3} \qquad \text{et} \qquad \Im m z_1 - z_2 = \frac{3}{2}$$

(c) $z_1 z_2 = (1+i)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}i + \frac{1}{3}i + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} - \frac{1}{6}i$. Par conséquent :

$$\Re e z_1 z_2 = \frac{5}{6} \qquad \text{et} \qquad \Im m z_1 z_2 = -\frac{1}{6}$$

(d) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{1+i}{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}i} = \dfrac{6+6i}{2-3i} \times \dfrac{2+3i}{2+3i} = \dfrac{12+18i+12i-18}{4-9i^2} = \dfrac{-6+20i}{13} = -\dfrac{6}{13} + \dfrac{20}{13}i$. Par conséquent :

$$\Re e \frac{z_1}{z_2} = -\frac{6}{13} \qquad \text{et} \qquad \Im m \frac{z_1}{z_2} = \frac{20}{13}$$

(e) $\overline{z_1} = 1 - i$, et donc $\Re e \overline{z_1} = 1$ et $\Im m \overline{z_1} = -1$

(f) $\overline{z_2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}i$, et donc $\Re e \overline{z_1} = \frac{1}{3}$ et $\Im m \overline{z_2} = \frac{1}{2}$

Exercice 2. (3 points)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 = -1 \iff z = \pm i$
2. $z^2 = -5 \iff z = \pm i\sqrt{5}$
3. $(z-2)^2 = 9 \iff z - 2 = \pm 3$ et donc $z = 5$ ou $z = -1$.

Exercice 3. (2 points)

x désigne un nombre réel et z est le nombre complexe suivant :

$$z = 3x - 2i + i(2i - 5x + x^2)$$

1. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z.

$$z = 3x - 2i - 2 - 5ix + ix^2 = 3x - 2 + i(x^2 - 5x - 2)$$

On en déduit que $\Re e(z_1) = 3x - 2$ et $\Im m(z_1) = x^2 - 5x - 2$.

2. En déduire la ou les valeurs de x pour lesquelles z est un imaginaire pur.

z est un imaginaire pur si et seulement si $\Re e(z_1) = 0 \iff 3x - 2 = 0 \iff x = \frac{2}{3}$.

Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

INTERROGATION N°12

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1. (2 points)

x désigne un nombre réel et z est le nombre complexe suivant :

$$z = 3x - 4i + i(2i - 3x + x^2)$$

1. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z.

$$z = 3x - 4i - 2 - 3ix + ix^2 = 3x - 2 + i(x^2 - 3x - 4)$$

Par conséquent :

$$\Re\text{e}(z) = 3x - 2 \qquad \text{et} \qquad \Im\text{m}(z) = x^2 - 3x - 4$$

2. En déduire la ou les valeurs de x pour lesquelles z est un imaginaire pur.

z est un imaginaire pur si et seulement si $\Re\text{e}(z_1) = 0 \iff 3x - 2 = 0 \iff x = \dfrac{2}{3}$.

Exercice 2. (5 points)

On considère les deux nombres complexes suivants : $z_1 = 0,6 - 0,3i$ et $z_2 = -\frac{1}{5} + \frac{1}{2}i$

1. Préciser les parties réelles et imaginaires de z_1 et z_2.

$$\Re\text{e}(z_1) = 0,6 \qquad \text{et} \qquad \Im\text{m}(z_1) = -0,3$$

$$\Re\text{e}(z_2) = -\frac{1}{5} \qquad \text{et} \qquad \Im\text{m}(z_2) = \frac{1}{2}$$

2. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants. Donner leurs parties réelles et imaginaires.

(a) $z_1 + z_2 = 0,6 - 0,3i - \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{2}i = \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{5}i$. Par conséquent :

$$\Re\text{e} z_1 + z_2 = \frac{2}{5} \qquad \text{et} \qquad \Im\text{m} z_1 + z_2 = \frac{1}{5}$$

(b) $z_1 - z_2 = 0,6 - 0,3i + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{2}i = \dfrac{4}{5} - \dfrac{4}{5}i$. Par conséquent :

$$\Re\text{e} z_1 - z_2 = \frac{4}{5} \qquad \text{et} \qquad \Im\text{m} z_1 - z_2 = -\frac{4}{5}$$

(c) $z_1 z_2 = (0,6 - 0,3i)\left(-\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{2}i\right) = -\dfrac{3}{25} + \dfrac{3}{10}i + \dfrac{3}{50}i + \dfrac{3}{20} = \dfrac{3}{100} + \dfrac{36}{100}i$. Par conséquent :

$$\Re\text{e} z_1 z_2 = 0,03 \qquad \text{et} \qquad \Im\text{m} z_1 z_2 = 0,36$$

(d) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{0,6 - 0,,3i}{-0,2 + 0,5i} = \dfrac{6 - 3i}{-2 + 5i} \times \dfrac{-2 - 5i}{-2 - 5i} = \dfrac{-12 - 30i + 6i - 15}{(-2)^2 - (5i)^2} = \dfrac{-27 - 24i}{4 + 25} = -\dfrac{27}{25} - \dfrac{24}{25}i$. Par conséquent :

$$\Re\text{e}\frac{z_1}{z_2} = -\frac{27}{25} \qquad \text{et} \qquad \Im\text{m}\frac{z_1}{z_2} = -\frac{24}{25}$$

(e) $\overline{z_1} = 0,6 + 0,3i$, et donc $\Re\text{e}\overline{z_1} = 0,6$ et $\Im\text{m}\overline{z_1} = 0,3$

(f) $\overline{z_2} = -\dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{2}i$, et donc $\Re\text{e}\overline{z_1} = -\dfrac{1}{5}$ et $\Im\text{m}\overline{z_2} = -\dfrac{1}{2}$

Exercice 3. (3 points)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 = -9 \iff z = \pm 3i$;
2. $2z^2 = -32 \iff z^2 = -16 \iff z = \pm 4i$
3. $(z-2)^2 = 9 \iff z - 2 = \pm 3$ et donc $z = 5$ ou $z = -1$.