Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

CORRECTION DE L'INTERROGATION N°11

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1. (10 points)

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
   Pour tout réel x on a :
   $$e^{2x} > 0 \Longrightarrow e^{2x}+1 > 1 \Longrightarrow e^{2x}+1 \neq 0$$
   Par conséquent f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la limite de f en $-\infty$. Que peut-on en déduire pour sa représentation graphique $\mathscr{C}_f$. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ ce qui implique que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$ par quotient on obtient au final :
   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$$
   On en déduit l'existence d'une asymptote horizontale en $-\infty$ d'équation $y = -1$.
3. (a) Démontrer que pour tout réel x on a :
   $$f(x) = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$$
   Pour tout réel x on a :
   $$f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{e^{2x}\left(1-\frac{1}{e^{2x}}\right)}{e^{2x}\left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)} = \frac{1-\frac{1}{e^{2x}}}{1+e^{2x}} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$$
   (b) En déduire la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphique.
   On a $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ ce qui implique que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$ par quotient on obtient au final :
   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$$
   On en déduit l'existence d'une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 1$.
4. Déterminer $f'(x)$, puis étudier son signe. En déduire le tableau de variations de f.
   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :
   $$f'(x) = \frac{2e^{2x}(e^{2x}+1)-(e^{2x}-1)2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{2e^{4x}+2e^{2x}-2e^{4x}+2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$$
   On a $4e^{2x} > 0$ pour tout réel x et $(e^{2x}+1)^2 > 0$ pour tout réel x par conséquent :
   $$f'(x) > 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-1 \nearrow 1$

5. Déterminer l'équation de la tangente de f en 0.
   L'équation de la tangente en 0 est de la forme :
   $$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$
   $f(0) = \dfrac{e^0-1}{e^0+1} = \dfrac{1-1}{2} = 0$ et $f'(0) = \dfrac{4e^0}{(e^0+1)^2} = \dfrac{4}{4} = 1$, par conséquent l'équation de la tangente en 0 est :
   $$y = x$$
6. Démontrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2}.
   La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans l'intervalle $]-1;1[$ (qui contient 0) donc d'après le corollaire du TVI l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dont la calculatrice donne une valeur approchée.

Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

CORRECTION DE L'INTERROGATION N°11

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Les cinq questions sont indépendantes.

Exercice 1. (10 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - x}$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

PARTIE A.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x - 1$

1. Etudier les variations de la fonction g.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$g'(x) = e^x - 1$$

$e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff e^x > e^0 \iff x > 0$, on déduit le tableau de variation de g du signe de g' :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

2. En déduire que pour tout réel x on a :

$$e^x - x > 0$$

D'après le tableau de variation g admet pour minimum 1 par conséquent pour tout réel x on a :

$$g(x) \geq 1 \Longrightarrow g(x) > 0 \Longrightarrow e^x - x > 0$$

PARTIE B.

On rappelle que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

1. (a) Montrer que pour tout réel $x \neq 0$ on a :

$$f(x) = \frac{1}{\frac{e^x}{x} - 1}$$

Pour tout $x \neq 0$ on a :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - x} = \frac{x}{x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right)} = \frac{1}{\frac{e^x}{x} - 1}$$

(b) En déduire la limite de f en $+\infty$ puis celle en $-\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} - 1 = +\infty \Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

De plus $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ par conséquent :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$$

On en déduit par quotient :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{0 - 1} = -1$$

(c) Interpréter graphiquement.

$\mathscr{C}_f$ admet deux asymptotes horizontales, une en $-\infty$ d'équation $y = 0$ et l'autre en $+\infty$ d'équation $y = -1$

2. (a) Démontrer que pour tout réel x on a :

$$f'(x) = \frac{(1 - x)e^x}{(e^x - x)^2}$$

Pour tout réel x on a :

$$f'(x) = \frac{e^x - x - x(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x - x - xe^x + x}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x(1 - x)}{(e^x - x)^2}$$

(b) Etudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f.

$f'(x)$ est du signe de $1-x$ puisque le dénominateur est un carré.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$1/(e-1)$	$\searrow$	