∾ DEVOIR SURVEILLÉ 3 ∾
SUITES-ESPACE-FONCTIONS

La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1. (4 points)

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On considère les points :

$$A(2;1;-1),\quad B(-1;2;4),\quad C(0;-2;3),\quad D(1;1;-2)$$

Pour chacune des affirmations suivantes, dire, en justifiant, si elle est vraie ou si elle est fausse.

1. **Affirmation 1** : Les points A, B et C définissent un plan.

$$\overrightarrow{AB}(-3;1;5)\qquad \text{et}\qquad \overrightarrow{AC}(-2;-3;4)$$

Pour passer de l'ordonnée du vecteur $\overrightarrow{AB}$ à l'ordonnée du vecteur $\overrightarrow{AC}$ on multiplie par -3 et $-3\times x_{\overrightarrow{AB}}\neq x_{\overrightarrow{AC}}$. On en déduit qu'il n'existe pas de réel t tel que $\overrightarrow{AB}=t\overrightarrow{AC}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, par conséquent les points A, B et C ne sont pas alignés et définissent un plan.
Affirmation VRAIE

2. **Affirmation 2** : Une représentation paramétrique de la droite (AC) est :

$$\left\{\begin{array}{l} x=2k\\ y=2+3k\\ z=3-4k\end{array}\right.\qquad k\in\mathbb{R}$$

On vérifie si les coordonnées du point A vérifie les équations de cette réprésentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{l} 2=2k\\ 1=2+3k\\ -1=3-4k\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{l} k=1\\ k\neq 1\\ k=1\end{array}\right.$$

Il n'existe aucune valeur du paramètre k permettant de retrouver les coordonnées du point A, ce qui prouve que la représentation paramétrique donnée n'est pas une représentation paramétrique de (AC).

3. **Affirmation 3** : Une représentation paramétrique du plan (ABD) est :

$$\left\{\begin{array}{l} x=1+3t-t'\\ y=1-t\\ z=-2-5t-t'\end{array}\right.\qquad t\in\mathbb{R},\ t'\in\mathbb{R}$$

En notant $M(x;y;z)$ un point du plan proposé puis $\vec{u}(3;-1;-5)$ et $\vec{v}(-1;0;-1)$ un couple de vecteut directeur de ce plan.

$$\left\{\begin{array}{l} x=1+3t-t'\\ y=1-t\\ z=-2-5t-t'\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{l} x-1=+3t-t'\\ y-1=-t\\ z+2=-5t-t'\end{array}\right.\iff\overrightarrow{DM}=t\vec{u}+t'\vec{v}$$

Enfin $\vec{u}=-\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}(-1;0;-1)=\vec{v}$.
Par conséquent le plan proposé passe par le point D et est dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AD}$. Nécessairement il s'agit du plan (ABD).
Affirmation VRAIE.

4. **Affirmation 4** : La droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{l} x=1+2u\\ y=-1+3u\\ z=1-4u\end{array}\right.\qquad u\in\mathbb{R}$$

est sécante avec la droite (AC). Le vecteur $\vec{d}\,(2;3;-4)$ dirige Δ. De plus $\vec{d}=-\overrightarrow{AC}$. Par conséquent Δ est parallèle à (AC).
Affirmation FAUSSE.

Exercice 2. (7 points)

PARTIE A. **Etude d'une fonction auxiliaire**

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3 + 12x + 4$$

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} 12x+4 = -\infty \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} x^3+12x+4 = -\infty$$

De même $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} 12x+4 = +\infty$ et par addition :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

2. Dresser le tableau de variation de la fonction g.

g est une fonction polynôme de degré 3, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout réel x :

$$g'(x) = 3x^2 + 12 \geq 12 > 0$$

On en déduit son tableau de variation :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α. Donner α à 10^{-2} près ou proposer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

g est continue sur $\mathbb{R}$ (puisque dérivable sur $\mathbb{R}$), g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et a des limites aux infinies de signes opposés par conséquent d'après le corollaire du TVI l'équation $g(x) = 0$ admet exactement une solution $\alpha \simeq 0,33$.

4. Dresser le tableau de signe de la fonction g.

g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en α d'où :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

PARTIE B. **Etude d'une fonction rationnelle**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3-2}{x^2+4}$$

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Pour tout $x \neq 0$ on a :

$$f(x) = \frac{x^3\left(1-\dfrac{2}{x^3}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{4}{x^2}\right)} = x\frac{1-\dfrac{2}{x^3}}{1+\dfrac{4}{x^2}}$$

En $\pm\infty$ on a :

$$\lim_{\pm\infty} \frac{1-\dfrac{2}{x^3}}{1+\dfrac{4}{x^2}} = 1$$

Puisque $\lim_{+\infty} x = +\infty$ par produit on obtient :

$$\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$$

Puisque $\lim\limits_{-\infty} x = -\infty$ par produit on obtient :

$$\lim_{-\infty\infty\infty} f(x) = -\infty$$

2. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+4)^2}$$

Le quotient de fonction polynôme est une fonction dérivable sur son ensemble de définition ici $\mathbb{R}$ par conséquent pour tout nombre réel x on a :

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+4) - 2x(x^3-2)}{(x^2+4)^2} = \frac{3x^4+12x^2-2x^4+4x}{(x^2+4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^4+12x^2+4x}{(x^2+4)^2} = \frac{x(x^3+12x+4))}{(x^2+4)^2} = \frac{xg(x)}{(x^2+4)^2}$$

3. En déduire le tableau de variation de la fonction f.

Le dénominateur $(x^2+4)^2$ est strictement positif donc le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $xg(x)$

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0		$+$		
x			$-$		0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			$f(\alpha)$				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				$-\frac{1}{2}$		

Exercice 3. (9 points)

1. On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :
$$f(x)=\sqrt{3x+4}$$
   (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   On a $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x+4=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$ par conséquent
$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{3x+4}=+\infty$$
   (b) Dresser le tableau de variation complet de f.
   Lorsque $x\geq 0$, $3x+4\geq 4$ donc f qui est la composée de la fonction racine carrée avec une fonction affine à valeurs dans $]0;+\infty[$ est dérivable sur $[0;+\infty[$ et on a :
$$f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x+4}}$$
   Pour tout $x\geq 0$, on a $f'(x)>0$ d'où :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	2 $\nearrow$	$+\infty$

   (c) Justifier que la fonction f est continue sur $[0;+\infty[$.
   On vient d'expliquer que f est dérivable sur $[0;+\infty[$ elle est donc continue sur $[0;+\infty[$.

2. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$u_0=0 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1}=f(u_n)=\sqrt{3u_n+4}$$
   (a) Montrer, par récurrence et en utilisant la fonction f, que (u_n) est strictement croissante.
   Notons $\mathscr{P}(n)$: $(0\leq)u_n<u_{n+1}$ la propriété que nous souhaitons démontrer par récurrence.
   - ***Initialisaition*** : $u_1=\sqrt{3\times 0+4}=2$ ainsi on vérifie $(0\leq)u_0<u_1$, par conséquent $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - ***Hérédité*** : Montrons que
$$(0\leq)u_n<u_{n+1}\Longrightarrow(0\leq)u_{n+1}<u_{n+2}$$
   On a puisque f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$
$$(0\leq)u_n<u_{n+1}\Longrightarrow f(0)<f(u_n)<f(u_{n+1})\Longrightarrow 2\leq u_{n+1}<u_{n+2}$$
   (b) ***Conclusion :*** La propriété $\mathscr{P}$ est initialisée à partir de $n=0$ et est héréditaire, par conséquent pour tout entier naturel n on a $u_n<u_{n+1}$ ce qui signifie que la suite est strictement croissante.
   (c) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $u_n\leq 4$
   Notons $\mathscr{Q}(n)$: $u_n\leq 4$. Montrons cette propriété par récurrence.
   - ***Initialisation*** : $u_0=0<4$ donc $\mathscr{Q}(0)$ est vraie.
   - ***Hérédité*** : Montrons que
$$u_n\leq 4\Longrightarrow u_{n+1}\leq 4$$
   On a puisque f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et comme u est positive :
$$u_n\leq 4\Longrightarrow f(u_n)\leq f(4)=4\Longrightarrow u_{n+1}\leq 4$$

– ***Conclusion*** : La propriété $\mathscr{Q}$ est initialisée à partir de $n = 0$ et est héréditaire, par conséquent pour tout entier naturel n on a $u_n \leq 4$.

(d) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.
u est une suite croissante et majorée par 4 donc elle converge vers un réel $\ell \leq 4$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}^+$ de $u_{n+1} = f(u_n)$ on tire par passage à la limite :

$$\ell = f(\ell) \Longleftrightarrow \ell = \sqrt{3\ell+4} \Longleftrightarrow \ell^2 - 3\ell - 4 = 0$$

$\Delta = 9 + 16 = 25$ le trinôme admet deux racines -1 et 4.
Comme $u_0 = 0$ et que la suite u est strictement croissante, sa limite ne peut pas être -1, par conséquent u converge vers 4

3. On considère l'algorithme suivant :

Algorithme 1 :

Données:
u est un nombre réel.
n est un entier naturel.
ϵ est un nombre réel strictement positif.
$n = 0$.
$u = 0$.
Tant que $(|u - 4| \geq \epsilon)$ **Faire**
  $n := n + 1$.
  $u := \sqrt{3 \times u + 4}$
Fin Tant que
Afficher n

(a) Afin de découvrir l'affichage de cet algorithme pour $\epsilon = 0,1$. Recopier et compléter le tableau des valeurs prises par les variables n, u et par $|u-4|$ (*On se contentera de valeurs approchées*) :

n	0	1	2	3	4	5
u	0	2	$\simeq$ 3,16	$\simeq$	$\simeq$	$\simeq$ 3,95
$\lvert u-4 \rvert$	4	…	…	…	…	0,5

Qu'affiche cet algorithme ?
Cet algorithme affiche le premier à partir duquel on a $|u_n - 4| < \epsilon$, en l'occurrence pour cet exemple il affiche $n = 5$.

(b) Pourquoi est-on sûr qu'à partir d'un certain rang on aura $|u-4| < \epsilon$?
u est une suite qui converge vers 4 donc il existe un rang à partir duquel $|u-4| < \epsilon$. L'algorithme ne boucle donc pas à l'infini.

4. (a) On souhaite montrer que pout tout entier naturel n on a : $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$

i. Montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$4 - u_{n+1} = \frac{3(4-u_n)}{4+\sqrt{3u_n+4}}$$

On a :

$$4 - u_{n+1} = 4 - \sqrt{3u_n+4} = \frac{(4-\sqrt{3u_n+4})(4+\sqrt{3u_n+4})}{4+\sqrt{3u_n+4}} = \frac{16-(3u_n+4)}{4+\sqrt{3u_n+4}} = \frac{12-3u_n}{4+\sqrt{3u_n+4}} = \frac{3(4-u_n)}{4+\sqrt{3u_n+4}}$$

ii. En justifiant que $\sqrt{3u_n+4} \geq 2$ montrer que pour tout entier naturel n on a $\dfrac{3}{4+\sqrt{3u_n+4}} \leq \dfrac{1}{2}$.

$f(0) = 2$ et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc $\sqrt{3u_n+4} \geq 2$ d'où

$$4+\sqrt{3u_n+4} \geq 6 \Longrightarrow \frac{1}{4+\sqrt{3u_n+4}} \leq \frac{1}{6} \Longrightarrow \frac{3}{4+\sqrt{3u_n+4}} \leq \frac{1}{2}$$

iii. Conclure. $u_n \leq 4$ pour tout entier naturel n donc $4-u_n \geq 0$ d'où :

$$\frac{3}{4+\sqrt{3u_n+4}} \leq \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{3(4-u_n)}{4+\sqrt{3u_n+4}} \leq \frac{4-u_n}{2} \Longrightarrow 4-u_{n+1} \leq \frac{4-u_n}{2}$$

(b) En déduire que : $4-u_{10} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^5 (4-u_5)$

En appliquant successivement le résultat précédent on a :

$$4-u_{10} \leq \frac{4-u_9}{2} \leq \frac{4-u_8}{2^2} \leq \frac{4-u_7}{2^3} \leq \frac{4-u_6}{2^4} \leq \frac{4-u_5}{2^5}$$

(c) En déduire que pour $\epsilon = 0,01$, l'algorithme affichera une valeur de n inférieure ou égale à 10.

On sait d'après $3(a)$ que $4-u_5 < 0,1$ donc d'après la question précédente

$$4-u_{10} \leq 0,1 \times \frac{1}{32} \Longrightarrow 2-u_{10} < 0,01$$

Par conséquent l'algorithme affichera une valeur de n inférieure ou égale à 6 pour $\epsilon = 0,01$.