∽ DEVOIR SURVEILLÉ 2 ∽
L'ESPACE

La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1. **14 points**

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on considère les points :

$$A(5;-2;-1) \qquad B(-1;-1;4) \qquad C(3;0;-1) \qquad D(1,1,0) \qquad \text{et} \qquad E(4;0;1)$$

1. (a) Montrer que (ABC) est un plan.

   $\overrightarrow{AB}(-6;1;5)$ et $\overrightarrow{AC}(-2;2;0)$

   Pour passer de la côte de $\overrightarrow{AB}$ à la côte de $\overrightarrow{AC}$ il faut multiplier par 0, tandis que pour pour passer de l'ordonnée de $\overrightarrow{AB}$ à l'ordonnée de $\overrightarrow{AC}$ il faut multiplier par 2. De ce constat on tire qu'il n'existe pas de réel t tel que $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB}$, par conséquent les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

   (b) Déterminer une représentation paramétrique du plan (ABC).

$$M(x;y;z) \in (ABC) \Longleftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \text{ et } \exists t' \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} + t'\overrightarrow{AC} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x-5 & = & -6t-2t' \\ y+2 & = & t+2t' \\ z+1 & = & 5t, t \in R, t' \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$

   Une représentation paramétrique du plan (ABC) est alors :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -6t-2t'+5 \\ y & = & t+2t'-2 \\ z & = & 5t-1, t \in R, \qquad t' \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$

   (c) Montrer que $D \in (ABC)$.

   Si $D \in (ABC)$ alors il existe deux réels t et t' tels que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 1 & = & -6t-2t'+5 \\ 1 & = & t+2t'-2 \\ 0 & = & 5t-1 \end{array}\right.$$

   De la dernière équation on tire $t = \dfrac{1}{5}$. De la deuxième équation on tire :

$$1 = \frac{1}{5} + 2t' - 2 \Longleftrightarrow 2,8 = 2t' \Longleftrightarrow t' = 1,4$$

   Remplaçons t par $\dfrac{1}{5}$ et t' par 1,4 afin de vérifier la première égalité :

$$-6 \times \frac{1}{5} - 2 \times 1,4 + 5 = -1,2 - 2,8 + 5 = 1$$

   La troisième égalité est satisfaite, autrement dit on obtient le point D pour $t = \dfrac{1}{5}$ et $t' = 1,4$ dans la représentation paramétrique du plan (ABC) ce qui prouve que $D \in (ABC)$.

2. Soit d la droite passant par E dirigée par le vecteur $\vec{u}(-1;1;0)$.

   (a) Déterminer une représentation paramétrique de d.

$$M(x;y;z) \in d \Longleftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{EM} = t\vec{u} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x-4 & = & -t \\ y & = & t \\ z-1 & = & 0 \end{array}\right.$$

   Une représentation paramétrique de d est alors :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -t+4 \\ y & = & t \\ z & = & 1 \end{array}\right. \qquad t \in \mathbb{R}$$

(b) Déterminer une représentation paramétrique de (AC).

La droite (AC) est dirigée par $\overrightarrow{AC}$, d'où :

$$M(x;y;z) \in (AC) \iff \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AC} \iff \begin{cases} x-5 &= -2t \\ y+2 &= 2t \\ z+1 &= 0 \end{cases}$$

Une représentation paramétrique de d est alors :

$$\begin{cases} x &= -2t+5 \\ y &= 2t-2 \\ z &= -1 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

(c) Etudier les positions relatives des droites d et (AC).

Un vecteur directeur de d est $\vec{u}(-1;1;0)$ et un vecteur directeur de (AC) est $\overrightarrow{AC}(-2;2;0)$, on constate que :

$$\overrightarrow{AC} = 2\vec{u}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, par conséquent $d//(AC)$.
Elles sont éventuellement confondues. Vérifions si $C \in d$, si tel est le cas alors il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} 3 &= -t+4 \\ 0 &= t \\ -1 &= 1 \end{cases}$$

La troisième égalité étant absurde $C \notin d$, donc (AC) et d sont strictement parallèles et ne possèdent aucun point commun.

(d) Que peut-on en déduire quant à l'intersection entre la droite d et le plan (ABC).

La droite d est strictement parallèle à une droite du plan (ABC) donc elle est strictement parallèle au plan (ABC).
Par conséquent :

$$d \cap (ABC) = \emptyset$$

3. Soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre E et de rayon 5.

(a) Déterminer une équation cartésienne de la sphère $\mathscr{S}$.

$$M(x;y;z) \in \mathscr{S} \iff EM = 5 \iff EM^2 = 25 \iff (x-4)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 25$$

(b) Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection entre $\mathscr{S}$ et (AC).

$$M(x;y;z) \in \mathscr{S} \cap (AC), \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x &= -2t+5 \\ y &= 2t-2 \\ z &= -1 \\ (x-4)^2+y^2+(z-1)^2 &= 25 \end{cases}$$

Ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} x = -2t+5 \\ y = 2t-2 \\ z = -1 \\ (-2t+1)^2 + (2t-2)^2 + (-1-1)^2 = 25 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2t+5 \\ y = 2t-2 \\ z = -1 \\ 4t^2 - 4t + 1 + 4t^2 - 8t + 4 + 4 = 25 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2t+5 \\ y = 2t-2 \\ z = -1 \\ 8t^2 - 12t - 16 = 0 \end{cases}$$

Enfin

$$\begin{cases} x = -2t+5 \\ y = 2t-2 \\ z = -1 \\ 2t^2-3t-4=0 \end{cases}$$

Déterminons les racines du trinôme $2t^2-3t-4$. $\Delta = b^2-4ac = 9+32 = 41$. Le trinôme admet donc deux racines :

$$t_1 = \frac{3+\sqrt{41}}{4} \qquad \text{et} \qquad t_2 = \frac{3-\sqrt{41}}{4}$$

$\mathscr{S}$ et (AC) admettent deux points d'intersection, disons F et G :

$$\mathrm{F}\,(-2t_1+5; 2t_1-2; -1) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{G}\,(-2t_2+5; 2t_2-2; -1)$$

Exercice 2. **6 points**

Dans cet exercice, les questions sont indépendantes.

Pour chaque question, une seule des trois propositions a), b) ou c) est exacte. On demande d'indiquer laquelle ***avec*** *justification.*

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

1. La droite d a pour représentation paramétrique $x = 2-t$; $y = 3t$; $z = -3$, $t \in \mathbb{R}$.
   On considère les points A(2 ; 3 ; −3), B(2 ; 0 ; −3) et C(0 ; 6 ; 0). On a :

   a) $d = (\mathrm{AB})$ **b)** $d = (\mathrm{BC})$ **c)** $d \neq (\mathrm{AB})$ et $d \neq (\mathrm{BC})$ et $d \neq (\mathrm{CA})$

   B est-il un point de d ? Si oui alors il existe un réel t tel que :

   $$\begin{cases} 2 = 2-t \Longrightarrow t = 0 \\ 0 = 3t \Longrightarrow t = 0 \\ -3 = -3 \\ 2t^2-3t-4=0 \end{cases}$$

   donc $\mathrm{B} \in d$.
   C est-il un point de d ? Impossible puisque la côte de C n'est pas égale à −3, par conséquent $d \neq (\mathrm{BC})$ et $d \neq (\mathrm{CA})$.
   A est-il un point de d ? Si oui alors il existe un réel t tel que :

   $$\begin{cases} 2 = 2-t \Longrightarrow t = 0 \\ 3 = 3t \Longrightarrow t = 1 \\ -3 = -3 \\ 2t^2-3t-4=0 \end{cases}$$

   t ne peut-être égal simultanément à 1 et 0 par conséquent $\mathrm{A} \notin d$ donc $d \neq (\mathrm{AC})$.
   La bonne réponse est donc la c.

2. Les droites de représentations paramétriques respectives :
   $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-t \\ z = 1+t, t \in \mathrm{R}, \end{cases}$ $\begin{cases} x = -t' \\ y = -2-1,5t' \\ z = 3+t', \ t' \in \mathrm{R} \end{cases}$ admettent comme point commun :

   a) I(3 ; 0 ; 2) **b)** J(2 ; 1 ; 1) **c)** K(0 ; 2 ; −3) J est un point de la première droite, obtenue pour $t = 0$. Pour $t = -2$ dans la deuxième représentation paramétrique on obtient $x = 2$, $y = -2+3 = 1$ et $z = 3-2 = 1$, par conséquent J est commun aux deux droites.
   La bonne réponse est la b.

3. Les droites de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1+2t \\ z = 1+t, \end{cases} t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = 3-2t' \\ y = 7-4t' \\ z = 2-t', \end{cases} t' \in \mathbb{R}$$

sont :

a) parallèles **b)** sécantes **c)** non coplanaires $\vec{u}(0;2;1)$ dirige la première droite et $\vec{v}(-2;-4;-1)$ dirige la seconde, les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, on peut éliminer la réponse a.
Si les deux droites sont sécantes alors il existe un couple de réels $(t;t')$ tel que :

$$\begin{cases} 1 = 3-2t' \\ 1+2t = 7-4t' \\ 1+t = 2-t', \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} t' = 1 \\ 1+2t = 3 \\ 1+t = 1, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} t' = 1 \\ t = 1 \\ t = 0, \end{cases}$$

Il est impossible d'avoir simultanément $t=0$ et $t=1$ donc le système n'admet pas de solution, les droites ne sont pas sécantes, on en déduit qu'elles sont non coplanaires.
La bonne réponse est la c.