

~ DEVOIR SURVEILLÉ 2 ~ ARITHMÉTIQUE

La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1.

(10 points)

A chaque lettre de l'alphabet, on associe, grâce au tableau ci-dessous, un nombre entier compris entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

Etape 1 : A la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre m correspondant dans le tableau.

Etape 2 : On calcule le reste de la division euclidienne de $3m + 11$ par 26 et on le note p .

Etape 3 : Au nombre p , on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1. Coder la lettre U.

$$3 \times 20 + 11 \equiv 19[26] \text{ donc U se code T.}$$

2. Trouver un nombre entier x tel que $3x \equiv 1 \pmod{26}$.

$$\text{Pour } x = 9 \text{ on a } 27 \equiv 1[26].$$

3. En déduire que pour tout entier m on a $27m - 5 \equiv m - 5[26]$

$$27 \equiv 1[26] \implies 27m \equiv m[26] \implies 27m - 5 \equiv m - 5[26]$$

4. Démontrer alors l'équivalence :

$$3m + 11 \equiv p \pmod{26} \iff m \equiv 9p + 5 \pmod{26}.$$

- $\implies$) Si $3m + 11 \equiv p[26]$ alors $27m + 99 \equiv 9p[26]$. Or $27m \equiv m[26]$ et $99 \equiv -5[26]$ par conséquent on a $m - 5 \equiv 9p[26] \implies m \equiv 9p + 5[26]$.

- $\impliedby$) Si $m \equiv 9p + 5$ alors $3m \equiv 27p + 15[26]$. Or puisque $27 \equiv 1[26]$ on a $27p \equiv p[26]$ d'où :

$$3m \equiv p + 15[26] \implies 3m - 15 \equiv p[26] \implies 3m + 11 \equiv p[26]$$

5. Décoder alors la phrase J GLWX L UKXLV.

Pour J : J correspond à 9 et $9 \times 9 + 5 = 86 \equiv 8[26]$ donc on décode J par I.

Pour G : G correspond à 6 et $9 \times 6 + 5 = 59 \equiv 7[26]$ donc on décode G par H.

Pour L : L correspond à 11 et $9 \times 11 + 5 = 104 \equiv 0[26]$ donc on décode L par A.

Pour W : W correspond à 22 et $9 \times 22 + 5 = 203 \equiv 21[26]$ donc on décode W par V.

Pour X : X correspond à 23 et $9 \times 23 + 5 = 212 \equiv 4[26]$ donc on décode X par E.

Ainsi de suite au final la phrase J GLWX L UKXLV se décode par I Have a dream.

Exercice 2.

(4 points)

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

Valeurs de n	0	1	2	3	4	5	6	7
Congruence de $4^n \pmod{11}$	1	4	5	9	3	1	4	5
Congruence de $3^n \pmod{11}$	1	3	9	5	4	1	3	9

2. Démontrer que $4^{5n} - 3^{5n}$ est divisible par 11 pour tout entier naturel n .

On a $4^5 \equiv 1[11]$ donc $4^{5n} \equiv 1[11]$ et $3^5 \equiv 1[11]$ donc $3^{5n} \equiv 1[11]$ par conséquent :

$$4^{5n} - 3^{5n} \equiv 1 - 1[11] \iff 4^{5n} - 3^{5n} \equiv 0[11] \iff 11 \mid 4^{5n} - 3^{5n}$$

Exercice 3.

(Question Cactus)

On souhaite résoudre le problème suivant : *Combien l'armée de Han Xing comporte-t-elle de soldats au minimum si, rangés par 3 colonnes, il reste deux soldats, rangés par 5 colonnes il reste trois soldats, et rangés par 7 colonnes, il reste deux soldats ?*

Si on note n le nombre de soldats de l'armée on a :

$$n - 2 \equiv 0[3], \quad n - 3 \equiv 0[5] \quad \text{et} \quad n - 2 \equiv 0[7]$$

On en déduit que $3|n-2$ et $7|n-2$ donc il existe un entier naturel k tel que $n-2 = 3k$ et $7|3k$ donc d'après le lemme d'euclide $7|3$ ou $7|k$. Comme 7 ne divise pas 3 il divise k et il existe un entier naturel k' tel que $k = 7k'$. Au final $n - 2 = 3 \times 7k' = 21k'$.

Pour $k' = 0$ on obtient $n = 2$ et on a pas $2 \equiv 3[5]$.

Pour $k' = 1$ on obtient $n = 23$ et on a bien $23 \equiv 3[5]$. Le nombre minimal de soldats de l'armée de Han Xing est donc de 23.