↜ Devoir Maison 9 ↜
TVI et étude de fonctions.

Tout élève traitera au moins un exercice.

Exercice 1. ♠♠♠

On se propose de déterminer le nombre de racine(s) du polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1$$

1. Déterminer P' puis P''.

   P étant un polynôme, P est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

   $$P'(x) = 16x^3 - 9x^2 + 4x - 1$$

   P' étant un polynôme, P' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

   $$P''(x) = 48x^2 - 18x + 4$$

2. Dresser le tableau de signe de P'', puis en déduire le tableau de variation de P'.

   Le discriminant $\Delta = -444$ de P'' étant négatif on en déduit que :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, P''(x) > 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$P''(x)$	+	
$P'(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

   Les limites sont justifiées à la question suivante.

3. Déterminer les limites de P' en $+\infty$ et en $-\infty$, en déduire que l'équation $P'(x) = 0$ admet exactement une solution α_1 dans $\mathbb{R}$ dont on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près.

   On a pour tout $x \neq 0$:

   $$P'(x) = x^3\left(16 - \frac{9}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)$$

   $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 16 - \frac{9}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{1}{x^3} = 16$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$, d'où par produit :

   $$\lim_{x\to+\infty} P'(x) = +\infty$$

   et de $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ on déduit, toujours par produit que :

   $$\lim_{x\to-\infty} P'(x) = -\infty$$

   P' étant une fonction polynôme elle est continue sur $\mathbb{R}$, de plus elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et compte tenu du résultat des limites, l'équation $P'(x) = 0$ admet d'après le corollaire du TVI exactement une solution dans $\mathbb{R}$ qui est approximativement :

   $$\alpha_1 \simeq 0,4$$

4. En déduire le tableau de signe de P' puis le tableau de variation de P.

   P' est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$ telle que $P(\alpha_1) = 0$ on a par conséquent :

x	$-\infty$		α_1		$+\infty$
$P'(x)$		$-$	0	$+$	

5. Calculer les limites de P en $+\infty$ et en $-\infty$, en déduire que $P(x) > 0$, $\quad \forall x \in \mathbb{R}$.

   On a pour tout $x \neq 0$:

$$P(x) = x^4\left(4 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)$$

   Or, $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} 4 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} x^4 = +\infty$ d'où par produit :

$$\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = +\infty$$

   Ainsi on obtient le tableau de variation de P :

x	$-\infty$		α_1		$+\infty$
$P'(x)$		$-$	0	$+$	
$P(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
			$P(\alpha_1)$		

   P est strictement décroissante sur $]-\infty;\alpha_1]$ puis strictement croissante sur $[\alpha_1;+\infty[$ elle admet donc un minimum en α_1 et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) \geq P(\alpha_1) > 0$$

6. Conclure.

   On vient de démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) > 0$, par conséquent il n'existe aucun réel x tel que $P(x) = 0$. Le polynôme P n'admet donc aucune racine dans $\mathbb{R}$.

7. On considère le polynôme Q définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$Q(x) = \frac{4}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1$$

   (a) Démontrer que $Q'(x) = P(x)$.

   Q est une fonction polynôme donc Q est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout réel x :

$$Q'(x) = 5 \times \frac{4}{5}x^4 - 4 \times \frac{3}{4}x^3 + 3 \times \frac{2}{3}x^2 - 2 \times \frac{1}{2}x + 1 = 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1 = P(x)$$

   (b) En déduire que l'équation $Q(x) = 0$ admet exactement une solution dans $\mathbb{R}$ dont on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près.

   On connaît le signe de Q', par conséquent on en déduit son tableau de variation :

x	$-\infty$		$+\infty$
$Q'(x)$		$+$	
$Q(x)$		$\nearrow$	$+\infty$
	$-\infty$		

   Pour obtenir $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} Q(x) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} Q(x) = +\infty$ on procède comme précédemment en factorisant par x^5.

Q est une fonction polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, 0 est compris dans l'intervalle $]-\infty;+\infty[$ on en déduit d'après le TVI que l'équation $Q(x)=0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ qui vaut approximativement :

$$\alpha \simeq 0,9$$

Exercice 2. ♠♠♠♠

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x^3-4}{x^2+1}$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 1cm.

1. On pose $g(x)=x^3+3x+8$.

   (a) Étudiez le sens de variation de g et montrez que l'équation $g(x)=0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α dont vous donnerez un encadrement d'amplitude 10^{-2}.[1] g est une fonction polynôme donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$g'(x)=3x^2+3x=x(3x+1)$$

g' admet deux racines évidentes 0 et $-\dfrac{1}{3}$ d'où :

x	$-\infty$		0		$-\dfrac{1}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	8	↘	$7-\dfrac{1}{27}$	↗	$+\infty$

En effet $g(0)=8$ et $g\left(-\dfrac{1}{3}\right)=7-\dfrac{1}{27}$.
De plus pour $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x+8=-\infty$ d'où par addition :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$$

De même pour $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x+8=+\infty$ d'où par addition :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$$

   (b) Précisez le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
Premièrement g est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme, deuxième elle est strictement monotone sur $\mathbb{R}^-$ et troisièmement $0<8$, d'après le corollaire du TVI l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution que nous nommerons α sur l'intervalle $\mathbb{R}^-$.
Sur $\mathbb{R}^+$, g admet un minimum qui est strictement positif, donc $g(x)>0$ pour $x>0$ ce qui donne :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2. (a) Étudiez les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

1. emploi classique du corollaire du TVI.

Pour tout $x \neq 0$ on a :

$$f(x) = \frac{x^3\left(1\frac{4}{x^3}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^3}\right)} = x\frac{1-\frac{4}{x^3}}{1+\frac{1}{x^3}}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to\pm\infty} dfrac1-\frac{4}{x^3}1+\frac{1}{x^3} = 1$ f admet les mêmes limites que x en $\pm\infty$ i.e :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

(b) Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$$

f est une fonction rationnelle donc f est dérivable sur son ensemble de définition, ici $\mathbb{R}$, par conséquent pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1)-2x(x^3-4)}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^4+3x^2-2x^4+8x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+3x^2+8x}{(x^2+1)^2} = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$$

(c) Dressez le tableau de variation de f.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $(x^2+1)^2 > 0$ donc g' est du signe du numérateur d'où :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
x			$-$		0	$+$	
$g(x)$		$-$	0		$+$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

3. Déterminez les abscisses des point B et B$'$ de $\mathscr{C}$ admettant une tangente parallèle à $\Delta : y = x$.[2]
Le coefficient directeur de Δ est 1, celui d'une tangente en un point de $\mathscr{C}$ d'abscisse a est $f'(a)$. Par conséquent $\mathscr{C}$ admet une tangente parallèle à Δ si et seulement si $f'(a) = 1$.

$$f'(a) = 1 \iff \frac{ag(a)}{(a^2+1)^2} = 1 \iff ag(a) = (a^2+1)^2 \iff ag(a) = a^4+2a^2+1$$

Et puis $g(a) = a^3+3a+8$ on obtient :

$$a^4+3a^2+8a = a^4+2a^2+1 \iff a^2+8a-1 = 0$$

$\Delta = 64+4 = 68$ d'où deux racines :

$$\beta = \frac{8-\sqrt{68}}{2} = -4-\sqrt{17} \qquad \text{et} \qquad \beta' = \frac{8+\sqrt{68}}{2} = -4+\sqrt{17}$$

L'abscisse de B est $-4-\sqrt{17}$ et celle de B$'$ est $-4+\sqrt{17}$.

4. (a) Vérifiez que $f(\alpha) = \frac{3\alpha}{2}$. Déduisez en une valeur approchée de $f(\alpha)$.[3]

Montrons que $f(\alpha) - \frac{3}{2}\alpha = 0$:

$$f(\alpha) - \frac{3}{2}\alpha = \frac{\alpha^3}{-}4\alpha^2+1-\frac{3}{2}\alpha$$

2. deux droites parallèles ont le même coefficient directeur...
3. utilisez le fait que $g(\alpha) = 0$.

Ce qui donne :

$$f(\alpha)-\frac{3}{2}\alpha=\frac{\alpha^3-4}{\alpha^2+1}-\frac{3\alpha}{2}=\frac{2\alpha^3-8-3\alpha(\alpha^2+1)}{2(\alpha^2+1)}=\frac{2\alpha^3-8-3\alpha^3-3\alpha}{2(\alpha^2+1)}=\frac{-\alpha^3-3\alpha-8}{2(\alpha^2+1)}$$

Or, $g(\alpha)=0$ par définition de α d'où :

$$\alpha^3+3\alpha+8=0 \Longleftrightarrow -\alpha^3=3\alpha+8$$

Ainsi :

$$f(\alpha)-\frac{3}{2}\alpha=\frac{3\alpha+8-3\alpha-8}{2(\alpha^2+1)}$$

Ainsi on a bien :

$$f(\alpha)=\frac{3\alpha}{2}$$

(b) Tracez Δ, $\mathscr{C}$ ainsi que les points B, B′ et M, N, P d'abscisses respectives 1, 2 et −1, sans oublier les cinq tangentes en ces points.