∽ DEVOIR MAISON 9 ∽
CONGRUENCE - CONJECTURE DE SP

Tout élève traitera au moins un exercice. A noter que l'exercice 2 a été écarté du DS1 au dernier moment.

Exercice 1. ♠♠

Lors du DS1, l'un d'entre vous (en fait plusieurs) a utilisé un résultat qui n'est pas présent dans le cours dont on va analyser la pertinence. J'ai nommé ce résultat conjecture de SP.

Dans tous l'exercice $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$

Conjecture de SP :

$$ac \equiv bc[n] \Longleftrightarrow a \equiv b[n]$$

1. L'une des deux implications de la conjecture de SP est vraie. Laquelle ? Redémontrer la.
   Si $a \equiv b[n]$ alors $ac \equiv bc[n]$ est vraie.
   Preuve : Si $a \equiv b[n]$ alors il existe un entier relatif k tel que :
   $$a - b = nk \Longrightarrow c(a-b) = nck \Longrightarrow ac - bc = nk'$$
   où $k' = ck$ est encore un entier relatif, par conséquent $n|ac - bc$ et donc :
   $$ac \equiv bc[n]$$

2. Si on suppose que c est premier et que n n'est pas un multiple de c, montrer que la conjecture de SP est vraie.
   On suppose que $ac \equiv bc[n]$ et on souhaite démontrer que $a \equiv b[n]$.
   Puisque $ac \equiv bc[n]$ alors il existe un entier naturel k tel que :
   $$ac - bc = nk \Longrightarrow c(a-b) = nk$$
   Ainsi $c|nk$ et c est un nombre premier, d'après le lemme d'Euclide c divise n ou c divise k. Par hypothèse c ne divise pas n donc c divise k, par conséquent il existe un entier relatif k' tel que $\frac{k}{c} = k'$ et on a donc :
   $$a - b = n\frac{k}{c} = nk'$$
   Par conséquent $n|a - b$ et donc :
   $$a \equiv b[n]$$

3. Donner des exemples pour lesquelles la conjecture de SP n'est pas vérifiée.
   Pour répondre à cette question il faut trouve au moins deux exemples.
   - Exemple 1 : $a = 5$, $b = 1$, $c = 4$ et $n = 16$ alors $20 \equiv 4[16]$ et pourtant il n'est pas vraie que $5 \equiv 1[16]$.
   - Exemple 2 : $a = 4$, $b = 1$, $c = 2$ et $n = 6$ alors $8 \equiv 2[6]$ et pourtant on a pas $4 \equiv 1[6]$...

4. Donner un exemple où c n'est pas premier mais pour lequel la conjecture de SP est vraie. Expliquer.
   Dans un premier temps on remarque que :
   $$20 \equiv 8[3]$$
   Et " après division par 4" on obtient :
   $$5 \equiv 2[3]$$
   La conjecture de SP semble s'appliquer de nouveau car effectivement $5 \equiv 2[3]$.
   On verra beaucoup plus tard dans l'année que cela provient du théorème de Gauss, en quelque d'une généralisation du lemme d'Euclide.

Exercice 2. ♠♠♠

On souhaite déterminer le chiffre des unités de 2^n+3^n selon les valeurs de n.

1. Compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
Reste de 2^n modulo 5	1	2	4	3	1	2	4	3
Reste de 3^n modulo 5	1	3	4	2	1	3	4	2
Reste de 2^n+3^n modulo 5	2	0	3	0	2	0	3	0

2. Conjecturer les valeurs des restes de 2^n+3^n en fonction des valeurs de n. On conjecture que, pour tout nombre entier k :
   (a) si n est impair alors $2^n+3^n \equiv 0[5]$;
   (b) si $n=4k$ alors $2^n+3^n \equiv 2[5]$;
   (c) si $n=4k+2$ alors $2^n+3^n \equiv 3[5]$;
3. Pour tout k et n entiers naturels, montrer que 2^n+3^n et $2^{n+4k}+3^{n+4k}$ ont même reste dans la division par 5.

$$2^4=16=5\times 3+1 \Longrightarrow 2^4 \equiv 1[5] \Longrightarrow 2^{4k} \equiv 1^k[5] \Longrightarrow 2^{4k}\times 2^n \equiv 2^n[5] \Longrightarrow 2^{4k+n} \equiv 2^n[5]$$

   De même :

$$3^4=81=5\times 16+1 \Longrightarrow 3^4 \equiv 1[5] \Longrightarrow 3^{4k} \equiv 1^k[5] \Longrightarrow 3^{4k}\times 3^n \equiv 3^n[5] \Longrightarrow 3^{4k+n} \equiv 3^n[5]$$

   Et par somme on obtient :
$$2^{4k+n}+3^{4k+n} \equiv 2^n+3^n[5]$$

4. En déduire l'ensemble des restes possibles de 2^n+3^n en fonction de n.
   $2^0+3^0 \equiv 0[5]$, $2^1+3^1=5 \equiv 0[5]$, $2^2+3^2 \equiv 3[5]$, $2^3+3^3 \equiv 0[5]$.
   Soit r le reste de la division euclidienne de n par 4 alors il existe un entier relatif q tel que $n=4q+r \Longrightarrow r=n-4q$ où r vaut 0, 1, 2 ou 3. D'après la question précédente :

$$2^n+3^n \equiv 2^r+3^r[5] \Longrightarrow$$

   Il suffit alors de se référer au quatre cas précédentes. Les restes possibles sont donc 0, 2 ou 3.
5. Montrer que 2^n+3^n est impair. En déduire son chiffre des unités en fonction de n.
   $2 \equiv 0[2] \Longrightarrow 2^n \equiv 0[2]$, de même $3 \equiv 1[2] \Longrightarrow 3^n \equiv 1[2]$, par addition :

$$2^n+3^n \equiv 1[2]$$

   Effectivement 2^n+3^n est impair.
   si n est impair d'après notre conjecture démontrée par la suite le reste de 2^n+3^n dans la division euclidienne par 5 est 0. Son chiffre des unités est donc 0 ou 5, comme 2^n+3^n est impair son chiffre des unités est dans ce cas 5.
   si n est un multiple de 4 alors $2^n+3^n \equiv 2[5]$, son chiffre des unités est alors 2 ou 7, 2^n+3^n étant impair on conclut que son chiffre des unités est 7.
   Enfin si n est un multiple de 2 mais pas de 4 alors $2^n+3^n \equiv 3[5]$ ce qui implique que son chiffre des unités est 3 (et pas 8).
6. En déduire le chiffre des unités de $2^{2013}+3^{2013}$.
   $2013=4\times 503+1$ donc le chiffre des unités de $2^{2013}+3^{2013}$ est 5 en appliquant la question précédente