❧ Correction du devoir maison 7 ❧
Limites de fonctions et composition.

Vous traiterez au choix au moins un exercice parmi les trois suivants.

Exercice 1. ♠

1. Rechercher les asymptotes parallèles aux axes que peuvent présenter les courbes représentatives des fonctions suivantes :

   (a) $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$

   On a :

$$\lim_{x\to\pm\infty} x-2 = \pm\infty \Longrightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

   On en déduit que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $\pm\infty$.
   De plus :

$$\lim_{x\to 2^+} x-2 = 0^+ \Longrightarrow \lim_{x\to 2^+} \frac{3}{x-2} = +\infty$$

   Et :

$$\lim_{x\to 2^-} x-2 = 0^- \Longrightarrow \lim_{x\to 2^-} \frac{3}{x-2} = -\infty$$

   On en déduit l'existence d'une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

   (b) $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

   On a :

$$\lim_{x\to+\pm\infty} x^2 = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to+\pm\infty} -\frac{1}{x^2} = 0$$

   On en déduit que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $\pm\infty$.
   De plus :

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0^+ \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty$$

   On en déduit l'existence d'une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

   (c) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$

$$f(x) = \frac{x\left(2-\dfrac{3}{x}\right)}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} = \frac{2-\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}}$$

   On a alors :

$$\lim_{x\to+\pm\infty} 2-\frac{3}{x} = 2 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\pm\infty} 1+\frac{1}{x} = 1$$

   Ainsi :

$$\lim_{x\to+\pm\infty} \frac{2x-3}{x+1} = 2$$

   On en déduit l'existence d'une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ à $\mathscr{C}_f$ en $\pm\infty$.
   De plus

$$\lim_{x\to-1} 2x-3 = -5$$

   Et

$$\lim_{x\to-1^+} x+1 = 0^+ \Longrightarrow \lim_{x\to-1^+} \frac{2x-3}{x+1} = -\infty$$

   puis encore :

$$\lim_{x\to-1^-} x+1 = 0^- \Longrightarrow \lim_{x\to-1^-} \frac{2x-3}{x+1} = +\infty$$

   On en déduit l'existence d'une asymptote verticale d'équation $x = -1$.

   (d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$

$$\lim_{x\to+\pm\infty} x^2-4 = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to+\pm\infty} \frac{1}{x^2-4} = 0$$

On en déduit l'existence d'une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ à $\mathscr{C}_f$ en $\pm\infty$.
Aidons nous du tableau de signe de $x^2 - 4$ pour déterminer les limites en -2 à gauche et à droite puis en 2 à gauche et à droite :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a :

$$\lim_{x\to 2^+} x^2 - 4 = 0^+ \Longrightarrow \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x^2-4} = +\infty$$

De même :

$$\lim_{x\to 2^-} x^2 - 4 = 0^- \Longrightarrow \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x^2-4} = -\infty$$

On en déduit l'existence d'une asymptote verticale d'équation $x = 2$.
Puis :

$$\lim_{x\to -2^+} x^2 - 4 = 0^- \Longrightarrow \lim_{x\to -2^+} \frac{1}{x^2-4} = -\infty$$

Et :

$$\lim_{x\to -2^-} x^2 - 4 = 0^+ \Longrightarrow \lim_{x\to -2^-} \frac{1}{x^2-4} = +\infty$$

On en déduit l'existence d'une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

2. Dresser les tableaux de variations des fonctions précédentes sur leur ensemble de définition.

(a) $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$.
Pour tout $x \neq 2$, f est dérivable et :

$$f'(x) = \frac{-3}{(x-2)^2} < 0$$

On en déduit :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

(b) $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.
Pour tout $x \neq 0$, f est dérivable et :

$$f'(x) = \frac{2x}{x^4}$$

$f'(x)$ a le même signe que $2x$ d'où :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

(c) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$
Pour $x \neq -1$, f est dérivable et :

$$f'(x) = \frac{2(x+1)-(2x-3)}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2} > 0$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty \; \| \; -\infty$	$\nearrow$	2

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$
Pour $x \neq \pm 2$ f est dérivable et :

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-4)^2}$$

$f'(x)$ a le même signe que $-2x$ d'où :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty \; \| \; -\infty$	$\nearrow$	$-0,25$	$\searrow$	$-\infty \; \| \; +\infty$	$\searrow$	0

Exercice 2. ♠♠

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - \sqrt{x^2+1}$$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} x = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} x^2+1 = +\infty$$

Or, $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$, d'où :

$$\lim_{x\to-\infty} x - \sqrt{x^2+1} = -\infty$$

2. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f(x) = -\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f(x) = x - \sqrt{x^2+1} = x - \sqrt{x^2+1} \times \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{(x-\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f(x) = \frac{x^2-(x^2+1)}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

(b) En déduire la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+1=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X}=+\infty$ d'où :

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}=+\infty$$

Au final :

$$\lim_{x\to+\infty} x+\sqrt{x^2+1}=+\infty$$

Or, $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{X}=0$ ce qui implique enfin que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=0$$

On en déduit l'existence d'une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y=0$.

3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par :

$$g(x)=\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$$

(a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\{2\}$ on a $g(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}$

Pour tout $x\neq 2$ on a :

$$g(x)=\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\frac{x^2+5-9}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$

Ce qui donne, pour $x\neq 2$ on a :

$$g(x)=\frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}$$

(b) En déduire la limite de g en 2.

On a :

$$\lim_{x\to2} x+2=4$$

et

$$\lim_{x\to2} \sqrt{x^2+5}+3=6$$

Par quotient on obtient :

$$\lim_{x\to2} g(x)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

4. On considère les fonctions h et k définies sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$h(x)=\cos\frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad k(x)=\sin\frac{1}{x}$$

(a) Déterminer $\lim\limits_{x\to\pm\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} k(x)$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}=0$$

De plus $\lim\limits_{X\to0} \cos X=\cos 0=1$, par composition on a donc :

$$\lim_{x\to\pm\infty} h(x)=1$$

De même $\lim\limits_{X\to0} \sin X=sin0=0$, par composition on a donc :

$$\lim_{x\to\pm\infty} k(x)=0$$

(b) Que pensez-vous de $\lim_{x\to 0} h(x)$ et $\lim_{x\to 0} k(x)$

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \pm\infty$ et $\lim_{X\to\pm\infty} \cos X$ n'existe pas. De même $\lim_{X\to\pm\infty} \sin X$ n'existe pas. On en déduit que $\lim_{x\to 0} h(x)$ et $\lim_{x\to 0} k(x)$ n'existe pas.

Exercice 3. ♠♠♠

Une caractérisation des fonctions égales à leur réciproque

On considère une fonction f définie sur un intervalle I telle que :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \qquad f\circ f(x) = x$$

et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j})$

1. Soit g la fonction définie sur $[0;1]$ par

$$g(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$$

(a) Etudier les variations de la fonction g.

Pour tout $x \in]0;1]$ on a

$$g'(x) = 1 - \frac{2}{2\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$$

Si $x \in]0;1]$ alors $\sqrt{x} > 0$ et $\sqrt{x} \leq 1 \Longleftrightarrow \sqrt{x} - 1 \leq 0$. Le numérateur est donc négatif ou nul et le dénominateur est positif, on en déduit que $g'(x) \leq 0$.

Par conséquent g est une fonction décroissante sur $[0;1]$. Résumons le tout dans un tableau de variation :

x	0		1
$g'(x)$	$\|\|$	$-$	0
$g(x)$	1	$\searrow$	0

(b) Montrer que pour tout $x \in [0;1]$ on a $g\circ g(x) = x$.

On a pour tout $x \in [0;1]$ (puisque g est à valeur dans $[0;1]$ d'après la question précédente, la racine ne pose pas de pb) :

$$g\circ g(x) = g(g(x)) = g(x) - 2\sqrt{g(x)} + 1 = x - 2\sqrt{x} + 1 - 2\sqrt{x - 2\sqrt{x} + 1} + 1$$

Tout d'abord, remarquons que :

$$\left(\sqrt{x} - 1\right)^2 = x - 2\sqrt{x} + 1 = (1 - \sqrt{x})^2$$

Puisque $\sqrt{x} \leq 1 \Longleftrightarrow 1 - \sqrt{x} \geq 0$ pour $x \in [0;1]$ on a :

$$\sqrt{x - 2\sqrt{x} + 1} = \sqrt{(1-\sqrt{x})^2} = 1 - \sqrt{x}$$

Ainsi, pour tout $x \in [0;1]$ on a :

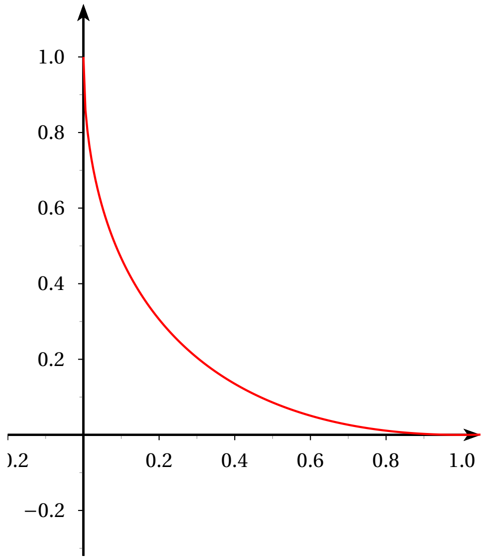
$$g\circ g(x) = x - 2\sqrt{x} + 2 - 2\sqrt{(1-\sqrt{x})^2} = x - 2\sqrt{x} + 2 - 2(1-\sqrt{x}) = x - 2\sqrt{x} + 2 - 2 + 2\sqrt{x}$$

Enfin on peut conclure :

$$\forall x \in [0;1], \qquad g\circ g(x) = x$$

(c) Contruire la représentation graphique $\mathscr{C}_g$ dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j})$.

D. Zancanaro
zancanaro.math@gmail.com



2. (a) Montrer que si $M(x; y) \in \mathscr{C}_g$ alors $M'(y; x) \in \mathscr{C}_g$.
Si $M(x; y) \in \mathscr{C}_g$ alors $y = g(x)$ dans ce cas le point $M_1(y, g(y))$ est encore un point de $\mathscr{C}_g$, or $g(y) = g(g(x)) = x$. Ainsi si $M(x; y) \in \mathscr{C}_g$ alors $M'(y; x) \in \mathscr{C}_g$.

(b) En déduire une symétrie de la représentation graphique $\mathscr{C}_g$.
Puisque $M(x; y) \in \mathscr{C}_g \Longrightarrow M'(y; x) \in \mathscr{C}_g$, $\mathscr{C}_g$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.