

~ CORRECTION DU DEVOIR MAISON 6 ~ CONGRUENCE

Vous traiterez au moins un exercice parmi les trois suivants.

Exercice 1.



Les questions sont indépendantes.

1. Pour quelles valeurs de l'entier relatif m la fraction $\frac{2m-5}{m+8}$ est-elle elle-même un entier ?

$$\frac{2m-5}{m+8} \in \mathbb{Z} \iff m+8 \mid 2m-5$$

Supposons que $m+8 \mid 2m-5$, essayons d'obtenir des informations sur m . Or, $m+8 \mid m+8$ donc $m+8$ divise toute combinaison linéaire de $m+8$ et de $2m-5$, en particulier :

$$m+8 \mid 2(m+8) - (2m-5) = 21$$

Si la fraction $\frac{2m-5}{m+8} \in \mathbb{Z}$ alors $m+8$ est un diviseur de 21.

La liste des diviseurs de 21 est la suivante :

$$\mathcal{D}_{21} = \{-21; -7; -3; -1; 1; 3; 7; 21\}$$

Si $m+8 = -21 \iff m = -29$.

Si $m+8 = -7 \iff m = -15$.

Si $m+8 = -3 \iff m = -11$.

Si $m+8 = -1 \iff m = -9$.

Si $m+8 = 1 \iff m = -7$.

Si $m+8 = 3 \iff m = -5$.

Si $m+8 = 7 \iff m = -1$.

Si $m+8 = 21 \iff m = 13$.

Vérifions que chacun de ses candidats à être solution du problème l'est vraiment. (ce n'est pas forcément le cas...) Un algorithme python effectuera cette tâche besogneuse à notre place :

```

untitled.py - /Users/davidzancanaro/Documents/untitled.py
m=-29
for i in range(43):
    numerateur=2*m-5
    denominateur=m+8
    if denominateur!=0 and numerateur%denominateur==0:
        print(m)
    m+=1

Python 3.3.2 Shell
>>>
-29
-15
-11
-9
-7
-5
-1
13
>>>
Ln: 140 Col: 0

```

$$\mathcal{S} = \{-29; -15; -11; -9; -7; -5; -1; 13\}$$

2. k étant un entier relatif, on pose : $x = 2k - 1$ et $y = 9k + 4$.

Montrer que tout diviseur commun à x et à y divise 17.

Si m divise simultanément x et y il divise aussi toute combinaison linéaire de x et de y .

En particulier $m|2y-9x$, or $2y-9x = 2(9k+4) - 2(2k-1) = 18k+8-18k+9 = 17$.

Par conséquent :

$$m|17$$

3. Déterminer les entiers naturels u et v vérifiant la relation : $u^2 - 4v^2 = 12$

$$u^2 - 4v^2 = 12 \iff (u-2v)(u+2v) = 12.$$

On en conclut que $u+2v|12$ et $u-2v|12$. L'ensemble des diviseurs de 12 sont :

$$\mathcal{D}_{12} = \{-12; -6; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 6; 12\}$$

$u+2v > 0$ donc $u+2v$ est un diviseur positif de 12. On est conduit à résoudre les différents systèmes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} u+2v=1 \\ u-2v=12 \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} u+2v=2 \\ u-2v=6 \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} u+2v=3 \\ u-2v=4 \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} u+2v=4 \\ u-2v=3 \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} u+2v=6 \\ u-2v=2 \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} u+2v=12 \\ u-2v=1 \end{array} \right.$$

Le premier et le dernier système donne $2u = 13$, il n'y a donc pas de solution entière.

Le second système donne $2u = 8 \iff u = 4$ et $v = -1$, v n'étant pas positif, le second système n'admet pas de solution.

Le troisième et le quatrième système donne $2u = 7$, il n'y a donc pas de solution entière.

Le cinquième système donne $u = 4$ et $v = 1$ qui est solution.

Le seul couple solution du problème est $u = 4$ et $v = 1$.

4. n est un entier naturel. Démontrer que quel que soit n , $3n^2 + 5n + 1$ est impair.

En déduire que ce nombre n'est jamais divisible par $n(n+1)$.

Si n est pair alors

$$n \equiv 0[2] \implies n^2 \equiv 0[2] \implies 3n^2 \equiv 0[2] \implies 3n^2 + 1 \equiv 1[2]$$

De plus si n est pair alors :

$$n \equiv 0[2] \implies 5n \equiv 0[2]$$

Au final, dans le cas où n est pair :

$$3n^2 + 5n + 1 \equiv 1[2]$$

Si n est impair alors

$$n \equiv 1[2] \implies n^2 \equiv 1[2] \implies 3n^2 \equiv 3[2] \implies 3n^2 \equiv 1[2] \implies 3n^2 + 1 \equiv 0[2]$$

De plus si n est impair alors :

$$n \equiv 1[2] \implies 5n \equiv 5[2] \implies 5n \equiv 1[2]$$

Au final, dans le cas où n est impair :

$$3n^2 + 5n + 1 \equiv 1[2]$$

Par conséquent, quelque soit l'entier naturel n on a :

$$3n^2 + 5n + 1 \equiv 1[2]$$

Enfin si n est pair alors $n \equiv 0[2]$ et $n+1 \equiv 1[2]$, alors :

$$n(n+1) \equiv 0[2]$$

De même si n est impair alors $n \equiv 1[2]$ et $n+1 \equiv 0[2]$, alors :

$$n(n+1) \equiv 0[2]$$

Ainsi, quelque soit l'entier naturel n on a :

$$n(n+1) \equiv 0[2]$$

Conclusion : L'entier $n(n+1)$ est pair et l'entier $3n^2 + 5n + 1$ est impair, par conséquent $n(n+1)$ ne divise pas $3n^2 + 5n + 1$.

Exercice 2.



1. Démontrer que pour tout entier naturel n , $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7.

$$2^3 \equiv 1[7] \implies 2^{3n} \equiv 1^n[7] \implies 2^{3n} \equiv 1[7] \implies 2^{3n} - 1 \equiv 0[7]$$

Pour tout entier naturel n , $2^{3n} - 1$ est donc un multiple de 7.

2. En déduire que $2^{3n+1} - 2$ est un multiple de 7 et que $2^{3n+2} - 4$ est un multiple de 7.

On a d'après la première question :

$$2^{3n} - 1 \equiv 0[7] \implies 2^{3n} \equiv 1[7] \implies 2^{3n+1} \equiv 2[7] \implies 2^{3n+1} - 2 \equiv 0[7]$$

Pour tout entier naturel n , $2^{3n+1} - 2$ est un multiple de 7.

Ainsi :

$$2^{3n+1} \equiv 2[7] \implies 2^{3n+2} \equiv 4[7] \implies 2^{3n+2} - 4 \equiv 0[7]$$

Pour tout entier naturel n , $2^{3n+2} - 4$ est un multiple de 7.

3. Déterminer les restes de la division euclidienne par 7 des puissances de 2.

On cherche pour tout entier naturel p le reste de 2^p par 7.

Cas 1 : p est divisible par 3 et il existe un entier naturel n tel que $2^p = 2^{3n}$.

Dans ce cas

$$2^{3n} - 1 \equiv 0[7] \iff 2^{3n} \equiv 1[7]$$

Cas 2 : Le reste de la division euclidienne de p par 3 est 1, dans ce cas il existe un entier naturel n tel que $p = 3n + 1$.

Auquel cas,

$$2^{3n+1} - 2 \equiv 0[7] \iff 2^{3n+1} \equiv 2[7]$$

Cas 3 : Le reste de la division euclidienne de p par 3 est 2, dans ce cas il existe un entier naturel n tel que $p = 3n + 2$.

Auquel cas,

$$2^{3n+2} - 4 \equiv 0[7] \iff 2^{3n+2} \equiv 4[7]$$

4. Soit $p \in \mathbb{N}$, on considère $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$

(a) Si $p = 3n$, quel est le reste de la division de A_p par 7 ?

$$2^{3n} \equiv 1[7]$$

$2^{2 \times 3n} = 2^{3 \times 2n}$ donc on est dans le cas 1 de la question précédente et :

$$2^{2p} \equiv 1[7]$$

$2^{3p} = 2^{3 \times 3n}$, de nouveau on est dans le cas 1 de la question précédente, par conséquent :

$$2^{3p} \equiv 1[7]$$

Par addition on obtient :

$$A_p \equiv 3[7]$$

Le reste de la division euclidienne de A_p par 7 est 3.

- (b) Démontrer que si $p = 3n + 1$, alors A_p est divisible par 7.

Si $p = 3n + 1$ alors $2p = 6n + 2 = 3 \times 2n + 2$ et $3p = 9n + 3 = 3 \times (3n + 1)$.

Par conséquent, en exploitant les résultats de la question précédente :

$$2^p \equiv 2[7] \quad \text{et} \quad 2^{2p} \equiv 4[7] \quad \text{et} \quad 2^{3p} \equiv 1[7]$$

Par addition on obtient :

$$A_p \equiv 2 + 4 + 1[7] \iff A_p \equiv 0[7]$$

A_p est donc, dans ce cas, divisible par 7.

- (c) Etudier le cas où $p = 3n + 2$.

Si $p = 3n + 2$ alors $2p = 6n + 4 = 6n + 3 + 1 = 3 \times (2n + 1) + 1$ et $3p = 9n + 6 = 3 \times (3n + 2)$. Par conséquent, en exploitant les résultats de la question précédente :

$$2^p \equiv 4[7] \quad \text{et} \quad 2^{2p} \equiv 2[7] \quad \text{et} \quad 2^{3p} \equiv 1[7]$$

Par addition on obtient :

$$A_p \equiv 4 + 2 + 1[7] \iff A_p \equiv 0[7]$$

A_p est donc, dans ce cas aussi, divisible par 7.

Exercice 3.



Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1. (a) Pour $1 \leq n \leq 6$, déterminer r tel que

$$3^n \equiv r[7] \quad \text{et} \quad 0 \leq r < 7$$

$$3^1 = 3 \equiv 3[7]$$

Si $n = 1$ alors $r = 3$.

$$3^2 = 9 \equiv 2[7]$$

Si $n = 2$ alors $r = 2$.

$$3^2 \equiv 2[7] \implies 3^3 \equiv 6[7]$$

Si $n = 3$ alors $r = 6$.

$$3^3 \equiv 6[7] \implies 3^3 \equiv -1[7] \implies 3^4 \equiv -3[7] \implies 3^4 \equiv 4[7]$$

Si $n = 4$ alors $r = 4$.

$$3^4 \equiv 4[7] \implies 3^5 \equiv 12[7] \implies 3^5 \equiv 5[7]$$

Si $n = 5$ alors $r = 5$.

$$3^5 \equiv 5[7] \implies 3^6 \equiv 15[7] \implies 3^6 \equiv 1[7]$$

Si $n = 6$ alors $r = 1$.

- (b) En déduire que pour tout entier naturel k : $3^{6k} - 1 \equiv 0[7]$ Puisque $3^6 \equiv 1[7]$ on a pour tout entier naturel k :

$$3^{6k} \equiv 1^k[7] \implies 3^{6k} - 1 \equiv 0[7]$$

- (c) Démontrer que, pour tout n , $3^{n+6} - 3^n \equiv 0[7]$.

D'après la première question on a :

$$3^6 \equiv 1[7] \implies 3^6 \times 3^n \equiv 3^n[7]$$

Par conséquent, pour tout entier naturel n :

$$3^{6+n} \equiv 3^n [7] \implies 3^{n+6} - 3^n \equiv 0 [7]$$

En déduire que 3^n et 3^{n+6} ont le même reste dans la division par 7.

Puisque, pour tout entier naturel n on a $3^{n+6} \equiv 3^n [7]$, 3^n et 3^{n+6} ont le même reste dans la division par 7.

- (d) À l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de 3^{1000} par 7.

$$1000 = 6 \times 166 + 4$$

Puisque pour tout entier naturel n 3^{n+6} et 3^n ont le même reste dans la division euclidienne par 7, il vient que 3^{1000} et 3^{994} ont le même reste dans la division euclidienne par 7 et ainsi de suite 3^{1000} a même reste que 3^4 dans la division euclidienne par 7.

Donc :

$$3^{1000} \equiv 4 [7]$$

- (e) De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de 3^n par 7, pour n quelconque ?
On effectue la division euclidienne de n par 6, si on note r le reste alors 3^n et 3^r ont même reste dans la division euclidienne par 7. On observe ensuite les résultats de la question 1.
- (f) En déduire que, pour tout entier naturel n , 7 ne divise pas 3^n .
 $n = 6q + r$ avec $0 \leq r < 6$. D'après la question précédente $3^n \equiv 3^r [7]$, enfin d'après la première question, 7 ne divise pas 3^r lorsque $r = 0$ (cas équivalent au cas $n = 6$), 1, 2, 3, 4, ou 5.

2. Soit $U_n = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} 3^i$, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

- (a) En utilisant une suite géométrique que l'on précisera, montrer que $U_n = \frac{3^n - 1}{2}$
Soit v la suite géométrique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison 3, alors :

$$U_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = v_0 \times \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1 - 3^n}{-2} = \frac{3^n - 1}{2}$$

En déduire que 2 divise $3^n - 1$.

Puisque U_n est une somme finie d'entier naturel, U_n est encore un entier naturel i.e $\frac{3^n - 1}{2} \in \mathbb{N}$, par conséquent $2 \mid 3^n - 1$.

- (b) Montrer que si U_n est divisible par 7, alors $3^n - 1$ est divisible par 7.
Si U_n est divisible par 7 alors :

$$U_n \equiv 0 [7] \implies \frac{3^n - 1}{2} \equiv 0 [7]$$

En multipliant par 2 on obtient :

$$3^n - 1 \equiv 0 [7]$$

Ainsi si U_n est divisible par 7 alors $3^n - 1$ est divisible par 7.

- (c) Réciproquement, montrer que si $3^n - 1$ est divisible par 7, alors U_n est divisible par 7.
Supposons que $3^n - 1$ soit divisible par 7 alors $2U_n = 3^n - 1$ est divisible par 7.
Remarque : On a $2U_n \equiv 0 [7]$, mais la division n'est pas une opération permise pour les congruences, alors on va procéder autrement.
Puisque 7 divise $2U_n$ il existe un entier naturel k tel que :

$$2U_n = 7k \quad \text{et} \quad U_n \text{ entier}$$

Ainsi :

$$U_n = 7 \times \frac{k}{2} \quad \text{et} \quad U_n \text{ entier}$$

Si k est impair alors il existe un entier t tel que $k = 2t + 1$ auquel cas $\frac{k}{2} = t + \frac{1}{2}$ auquel cas $7 \times \frac{k}{2} = 7t + 3,5$. Or, pour tout entier t , $2U_n = 7t + 3,5 \notin \mathbb{N}$, par conséquent, puisque U_n est entier, il est impossible que k soit impair, donc k est pair. Ainsi il existe un entier naturel m tel que $k = 2m$. D'où :

$$U_n = 7 \times m \implies 7|m$$

En déduire les valeurs de n telles que U_n soit divisible par 7.

On vient de démontrer que U_n est divisible par 7 si et seulement si $3^n - 1$ est divisible par 7.

Or, $3^n \equiv 3^r [7]$ où r est le reste de la division euclidienne de n par 6.

Donc :

$$3^n - 1 \equiv 3^r - 1 [7]$$

Enfin $3^r - 1 \equiv 0 [7]$ si et seulement si $r = 0$. Autrement dit $7|3^n - 1$ si et seulement si n est un multiple de 6.

Conclusion : $7|U_n$ si et seulement si n est un multiple de 6.