ൟ Correction du devoir maison 5 ൟ
Congruence

Exercice 1. ♠♠♠

1. Déterminer, suivant les valeurs de $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de 2^n par 5.
   On constate que $2^0 \equiv 1[5]$ puis $2^1 \equiv 2[5]$ puis $2^2 \equiv 4[5]$ puis $2^3 \equiv 3[5]$ puis $2^4 \equiv 1[5]$ puis $2^5 \equiv 2[5]$ puis encore $2^6 \equiv 4[5]$. Par conséquent pour $k \in \mathbb{N}$ de $2^4 \equiv 1[5]$ on tire :
   $$2^{4^k} \equiv 1^k[5] \Longleftrightarrow 2^{4k} \equiv 1[5]$$
   On en déduit que :
   $$2^{4k+1} \equiv 1 \times 2 \equiv 2[5]$$
   On en déduit que :
   $$2^{4k+2} \equiv 4[5]$$
   Et enfin que :
   $$2^{4k+3} \equiv 8 \equiv 3[5]$$
2. Quel est le reste de la division de 1357^{2013} par 5 ?
   Le reste de la division euclidienne de 1357 par 5 vaut 2 donc :
   $$1357 \equiv 2[5] \Longrightarrow 1357^{2013} \equiv 2^{2013}[5]$$
   Or, $2013 = 4 \times 503 + 1$ donc d'après la question précédente :
   $$2^{2013} \equiv 2[5]$$
   Par conséquent
   $$1357^{2013} \equiv 2[5]$$
3. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $5^{2n} - (-23)^n$ est divisible par 24.
   On a
   $$25 \equiv 1[24] \Longleftrightarrow 5^2 \equiv 1[24] \Longleftrightarrow 5^{2n} \equiv 1^n[24] \Longleftrightarrow 5^{2n} \equiv 1[24]$$
   De même
   $$-23 \equiv 1[24] \Longleftrightarrow (-23)^n \equiv 1^n[24] \Longleftrightarrow (-23)^n \equiv 1[24]$$
   Par conséquent
   $$5^{2n} \equiv (-23)^n[24] \Longleftrightarrow 24|5^{2n} - (-23)^n$$
4. Pour quelle valeurs de n, $2n^2 - 10n + 8$ est-il divisible par 5 ?
   Remarquons que $-10n \equiv 0[5] \Rightarrow -10n + 8 \equiv 3[5]$.
   Le reste de la division euclidienne de n par 5 peut-être égal à 0, 1, 2, 3 ou 4. Analysons séparément chacun des cas.
   - **Cas 1** : $n \equiv 0[5] \Rightarrow n^2 \equiv 0[5] \Rightarrow 2n^2 \equiv 0[5] \Rightarrow 2n^2 - 10n + 8 \equiv 3[5]$
     Si n est un multiple de 5 alors le reste de la division euclidienne de $2n^2 - 10n + 8$ est 3, par conséquent 5 ne divise pas $2n^2 - 10n + 8$.
   - **Cas 2** : Si $n \equiv 1[5] \Rightarrow n^2 \equiv 1[5] \Rightarrow 2n^2 \equiv 2[5] \Rightarrow 2n^2 - 10n + 8 \equiv 5[5] \Rightarrow 2n^2 - 10n + 8 \equiv 0[5]$.
     S'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 5k + 1$ alors le reste de la division euclidienne de $2n^2 - 10n + 8$ est 0, par conséquent 5 divise $2n^2 - 10n + 8$.

– **Cas 3** : Si $n \equiv 2[5] \Rightarrow n^2 \equiv 4[5] \Rightarrow 2n^2 \equiv 8[5] \Rightarrow 2n^2 - 10n + 8 \equiv 11[5] \Rightarrow 2n^2 - 10n + 8 \equiv 1[5]$.
S'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 5k + 2$ alors le reste de la division euclidienne de $2n^2 - 10n + 8$ est 1, par conséquent 5 ne divise pas $2n^2 - 10n + 8$.

– **Cas 4** : Si $n \equiv 3[5] \Rightarrow n^2 \equiv 9[5] \Rightarrow 2n^2 \equiv 18[5] \Rightarrow 2n^2 - 10n + 8 \equiv 21[5] \Rightarrow 2n^2 - 10n + 8 \equiv 1[5]$.
S'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 5k + 3$ alors le reste de la division euclidienne de $2n^2 - 10n + 8$ est 1, par conséquent 5 ne divise pas $2n^2 - 10n + 8$.

– **Cas 5** : Si $n \equiv 4[5] \Longleftrightarrow n \equiv -1[5] \Rightarrow n^2 \equiv 1[5] \Rightarrow 2n^2 \equiv 2[5] \Rightarrow 2n^2 - 10n + 8 \equiv 5[5] \Rightarrow 2n^2 - 10n + 8 \equiv 0[5]$.
S'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 5k + 4$ alors le reste de la division euclidienne de $2n^2 - 10n + 8$ est 0, par conséquent 5 divise $2n^2 - 10n + 8$.

Conclusion : Si $n + 1$ ou $n - 1$ est un multiple de 5 alors $2n^2 - 10n + 8$ est divisible par 5.