∽ Correction du devoir maison 4 ∾
Suites monotones et limites

Vous traiterez au choix au moins un exercice parmi les six suivants. En traiter au moins deux est conseillé. Si vous ne vous sentez pas encore à l'aise avec les suites, il est inutile de tourner la page.

Exercice 1. Théorème de convergence monotone. ♠

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$$

1. (a) Calculer u_1 et u_2.

$$u_1 = \frac{3u_0}{1+2u_0} = \frac{\frac{3}{2}}{1+1} = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

et

$$u_2 = \frac{3u_1}{1+2u_1} = \frac{\frac{9}{4}}{1+\frac{3}{2}} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{9}{10}$$

(b) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $0 < u_n$.

On considère la propriété $\mathscr{P}$ définie au rang n par :

$$\mathscr{P}(n) : 0 < u_n$$

Nous allons démontrer cette propriété par récurrence sur n :

- ***Initialisation*** : pour $n = 0$ on a $u_0 = \frac{1}{2}$ ce qui bien strictement supérieur à 0. Ainsi $\mathscr{P}(0)$ est vraie. En observant la question précédent on constate que $\mathscr{P}(1)$ et $\mathscr{P}(2)$ aussi sont vraies.
- ***Hérédité*** : Supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 < u_n$ et montrons que :

$$0 < u_{n+1}$$

$u_n > 0$ d'après notre hypothèse et $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$ par définition de la suite. $3u_n > 0$ et $1+2u_n > 1$ par conséquent, assez trivialement :

$$u_{n+1} > 0$$

Ainsi dès que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. La propriété $\mathscr{P}$ est donc héréditaire.
- ***Conclusion*** : $\mathscr{P}$ est donc héréditaire et initialisée à partir de $n = 0$, par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0$$

2. On **admet** que pour tout entier naturel n, $u_n < 1$.

(a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

$\forall n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n} - u_n = u_{n+1} = \frac{3u_n - u_n(1+2u_n)}{1+2u_n} = \frac{3u_n - u_n - 2u_n^2}{1+2u_n} = \frac{2u_n - 2u_n^2}{1+2u_n} = \frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}$$

Le dénominateur de quotient est strictement positif puisque $u_n > 0$, donc $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $2u_n(1-u_n)$ qui est lui même du signe de $1-u_n$. Enfin comme $u_n < 1$ on a :

$$1 - u_n > 0 \Longleftrightarrow \frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n} > 0 \Longleftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0 \Longleftrightarrow u_{n+1} > u_n$$

La suite u est donc strictement croissante.

(b) En déduire que la suite (u_n) converge.

u est une suite majorée par 1 (on l'a admis) et strictement croissante (c'est le résultat de la question précédente) par conséquent d'après un fameux résultat du cours la suite u est convergente.

Exercice 2. ♠♠

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$$

On admet que pour tout entier naturel n, on a $u_n > 0$
Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n < 1$$

Indication : Pour montrer que $\mathscr{P}$ est héréditaire, on introduira la fonction f définie sur $]0;1[$ par $f(x) = \frac{3x}{1+2x}$ et on étudiera ses variations.

Sur l'intervalle $]0;1[$ la fonction f est dérivable et sa dérivée vaut :

$$f'(x) = \frac{3(1+2x) - 3x \times 2}{(1+2x)^2} = \frac{3}{(1+2x)^2} > 0 \qquad \forall 0 < x < 1$$

La fonction f est donc strictement croissante sur l'intervalle $]0;1[$.
Démontrons alors la propriété que nous baptiserons cette fois-ci $\mathscr{L}$ définie par :

$$\mathscr{L}(n) : u_n < 1$$

– ***Initialisation*** : pour $n = 0$.
  $u_0 = \frac{1}{2} < 1$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
– ***Hérédité*** : Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $u_n < 1$ et montrons dans ce cas que $u_{n+1} < 1$.
  On a la suite d'équivalence suivante :

$$\begin{array}{ll} & u_n < 1 \qquad \text{notons que d'après l'exo 1 } u_n > 0 \\ \iff & f(u_n) < f(1) \qquad \text{car la fonction } f \text{ est strictement croissante sur }]0;1[\\ \iff & u_{n+1} < \frac{3}{1+2} \\ \iff & u_{n+1} < 1 \end{array}$$

  Ainsi dès que $\mathscr{P}(n)$ est vraie $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, ce qui montre que $\mathscr{P}$ est héréditaire.
– ***Conclusion*** : La propriété $\mathscr{P}$ est initialisée à partir de $n = 0$ et est héréditaire donc vraie quelque soit l'entier n i.e :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n < 1$$

Exercice 3. Théorème de convergence monotone. ♠♠

Soit (u_n) une suite décroissante et strictement positive.
Montrer que la suite (v_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{1}{1+u_n}$ est convergente. [1]

– Montrons que v est strictement croissante.
  Pour tout entier naturel n on a :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{1+u_{n+1}} - \frac{1}{1+u_n} = \frac{1+u_n-(1+u_{n+1}}{(1+u_n)(1+u_{n+1})} = \frac{u_n - u_{n+1}}{(1+u_n)(1+u_{n+1})}$$

  Le dénominateur de ce quotient est strictement positif puisque u est strictement positive, ainsi $v_{n+1} - v_n$ est du signe de $u_n - u_{n+1}$. Puisque u est strictement décroissante $u_n - u_{n+1} > 0$, par conséquent :

$$v_{n+1} - v_n > 0 \iff v_{n+1} > v_n$$

  La suite v est donc strictement croissante.

1. On montrera que v est strictement croissante et majorée.

- Montrons que v est majorée.
  Puisque u est strictement positive on a, pour tout entier naturel n :

$$1+u_n>1 \Longleftrightarrow \frac{1}{1+u_n}<1 \Longleftrightarrow v_n<1$$

  La suite v est donc majorée par 1.
- Concluons.
  v est strictement croissante et majorée par 1, d'après un théorème fameux du cours v converge.

Exercice 4. Théorème de comparaison. ♠♠

Soit $a \in \mathbb{R}$, on considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$u_0=a \qquad \text{et} \qquad u_{n+1}=u_n+u_n^2+1$$

1. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.
   Pour tout entier naturel n on a :

$$u_{n+1}=u_n+u_n^2+1 \Longleftrightarrow u_{n+1}-u_n=u_n^2+1 \geq 1$$

   Ainsi $u_{n+1}-u_n>0 \Longleftrightarrow u_{n+1}>u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ donc la suite u est croissante.
2. Ecrire et programmer un algorithme qui demande de saisir deux réels M et a et qui affiche le premier rang p pour lequel $u_p>\mathrm{M}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathscr{P}(n)$: $u_n \geq a+n$. Montrer par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   - ***Initialisation*** : pour $n=0$, $u_0=a$ et $a+0\times n=a$, et $a \geq a \Longrightarrow \mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - ***Hérédité*** : Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $u_n \geq a+n$ et montrons que :

$$u_{n+1} \geq a+n+1$$

     On a :

$$\begin{aligned} & u_{n+1}=u_n+u_n^2+1 \\ \Longrightarrow \quad & u_{n+1} \geq a+n+u_n^2+1 \\ \Longrightarrow \quad & u_{n+1} \geq a+n+1 \qquad \text{puisqu'un carré est positif ou nul} \end{aligned}$$

   Ainsi dès que $\mathscr{P}(n)$ $\mathscr{P}(n+1)$ l'est. La propriété $\mathscr{P}$ est héréditaire.
4. ***Conclusion*** : $\mathscr{P}$ étant initialisée à partir de $n=0$ et héréditaire, elle est vraie pour tout entier naturel n.
5. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.
   D'après la question qui précède on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} u_n \geq a+n$$

   Or :

$$\lim_{n\to+\infty} a+n=+\infty$$

   donc par comparaison on déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$$

Exercice 5. ♠♠♠♠

On considère la suite

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

1. Montrer que $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}, \forall k \geq 2$.

   Pour tout $k \geq 2$:

   $$k-1 \leq k \Longrightarrow k(k-1) \leq k^2 \Longrightarrow \frac{1}{k(k-1)} \geq \frac{1}{k^2}$$

   De plus pour tout $k \geq 2$:

   $$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k-(k-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)}$$

   En résumé on a :

   $$\forall k \geq 2, \qquad \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

2. Montrer que

   $$\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$

   On a :

   $$\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$

3. Montrer que

   $$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1$$

   .

   En combinant les résultats des questions 1 et 2 on a :

   $$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{n} \leq 1$$

4. Déterminer un réel M qui majore u_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

   En utilisant le résultat de la question précédente on obtient :

   $$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + 1 = 2$$

   Ainsi u est majorée par 2.

5. Montrer que u converge.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

   $$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0 \Longrightarrow u_{n+1} > u_n$$

   La suite u est donc strictement croissante.
   u est une suite strictement croissante et majorée par 2 donc u est convergente.

Exercice 6. ♠♠♠♠♠♠

On considère la suite définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

On considère pour $\mathrm{A} \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathscr{P}$ définie par :

$$\mathscr{P}(\mathrm{A}) : \exists n_0 \in \mathbb{N}, u_{n_0} > \mathrm{A}$$

1. L'objectif de cette question est de démontrer la propriété $\mathscr{P}$ par récurrence.

   (a) Montrer que $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

   Pour $\mathrm{A} = 0$, on cherche n_0 tel que $u_{n_0} > 0$. Or $u_1 = 1 > 0$ donc en choisissant $n_0 = 1$ on a bien $u_{n_0} > \mathrm{A}$, ainsi

$\mathscr{P}(0)$ est vraie.

(b) Montrer que $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Pour $A = 1$, on cherche n_0 tel que $u_{n_0} > 1$. Or $u_2 = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2} > 1$ donc en choisissant $n_0 = 2$ on a bien $u_{n_0} > A$, ainsi $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

(c) Supposons que $\mathscr{P}(A)$ soit vraie.

i. Traduire, par une phrase en français, la supposition que l'on a effectué.

On suppose que pour un entier naturel A, il existe un entier naturel n_0 tel que u_{n_0} est strictement supérieur à A.

ii. Montrer que $u_{2n_0} > u_{n_0} + \frac{1}{2}$. En déduire que $u_{4n_0} > u_{n_0} + 1$

$$u_{2n_0} = \sum_{k=1}^{2n_0} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n_0} \frac{1}{k} + \sum_{k=n_0+1}^{2n_0} \frac{1}{k}$$

or si $k < 2n_0$ alors $\frac{1}{k} > \frac{1}{2n_0}$, par conséquent :

$$u_{2n_0} > u_{n_0} + n_0 \times \frac{1}{2n_0} = u_{n_0} + \frac{1}{2}$$

En appliquant deux fois cette propriété nouvellement démontré on déduit que :

$$u_{4n_0} > u_{2n_0} + \frac{1}{2} \geq u_{n_0} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = u_{n_0} + 1$$

iii. En déduire que $\mathscr{P}(A+1)$ est vraie.

Si $\mathscr{P}(A)$ est vraie alors il existe un entier naturel n_0 tel que :

$$u_{n_0} > A$$

D'après la question précédente on a :

$$u_{4n_0} > u_{n_0} + 1 > A + 1$$

Ainsi il existe un entier naturel (l'entier $4n_0$) tel que $u_{n_0} > A+1$, la propriété $\mathscr{P}(A+1)$ est donc vraie dès que la propriété $\mathscr{P}(A)$ l'est.

(d) Conclure.

La propriété $\mathscr{P}$ est initialisée à partir de $A = 0$ et est héréditaire, par conséquent pour tout entier $A \in \mathbb{N}$ on a l'existe d'un entier naturel n_0 tel que $u_{n_0} > A$.

2. Utiliser la question 1 pour déterminer la limite de la suite u.

Considérons un intervalle de la forme $]a; +\infty[$ où a est un nombre réel strictement positif. Nommons A l'entier immédiatement supérieur à a, alors d'après la question 1 il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} > A \geq a$. Le nombre u_{n_0} est donc dans l'intervalle $]a; +\infty[$.
Enfin, de manière triviale la suite u est strictement croissante, en effet :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1} \Longrightarrow u_{n+1} > u_n$$

On en déduit que pour tout $n \geq n_0$, $u_n > u_{n_0} \geq a$.
On vient de montrer qu'à partir de l'entier n_0 tous les termes de la suite u sont dans l'intervalle $]a; +\infty[$.
Ce raisonnement est valable quelque soit l'intervalle $]a; +\infty[$ choisit au départ, par conséquent et par définition :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$$