∽ Correction du devoir maison 4 ∾
Divisibilité et division euclidienne

Vous traiterez au moins un exercice parmi les deux suivants.

Exercice 1. ♠♠

Dans la division euclidienne de a par b avec $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, on note q le quotient et r le reste.

1. Déterminer q sachant que q et r ne changent pas lorsqu'on augmente a de 20 et b de 10.
   On a donc $a = bq + r \iff a - bq - r = 0$ avec $0 \leq r < b$ mais aussi :
   $$a + 20 = (b+10)q + r \qquad \text{avec } 0 \leq r < b + 10$$
   Par suite :
   $$a + 20 = bq + 10q + r \iff a - bq - r = 10q - 20 \iff 10q - 20 = 0 \iff q = 2$$
2. Soit $a \in \mathbb{Z}$ tel qu'il existe $b \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 204b + 350$. Déterminer le quotient q et le reste r de la division euclidienne de a par 204.
   On a :
   $$a = 204b + 204 + 146 \iff a = 204(b+1) + 146$$
   Puisque $0 < 146 < 204$, d'après l'unicité du reste et du quotient dans la division euclidienne, on en déduit que $q = b + 1$ et $r = 146$.
3. Déterminer le quotient q et le reste r de la division euclidienne de $2^{2013} + 562$ par 4.
   $2^{2013} = 2^{2011+2} = 2^{2011} \times 2^2 = 4 \times 2^{2011}$ puis :
   $$562 = 4 \times 140 + 2$$
   Ainsi :
   $$2^{2013} + 562 = 4 \times 2^{2011} + 4 \times 140 + 2 = 4\left(2^{2011} + 140\right) + 2$$
   Comme $0 < 2 < 4$, d'après l'unicité du quotient et du reste on en déduit que le quotient et le reste de la division euclidienne de $2^{2013} + 562$ par 4 valent :
   $$q = 2^{2011} + 140 \qquad \text{et} \qquad r = 2$$

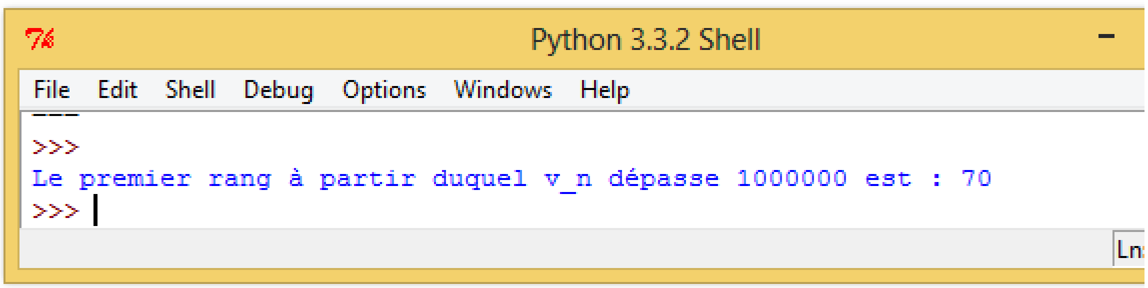
<u>Exercice</u> 2. ♠♠

1. Effectuer la div euclidienne de 3217 par 19, de -1273 par 17, de 228 par -15 et de -329 par -30.
   Dès lors que l'on a trouve un couple (q,r) vérifiant $a = bq + r$ avec $0 \leq r < |b|$ alors on est sûr qu'il s'agit du quotient et du reste.
   En utilisant le programme fait lors du DM précédent que voici :

```
#Premier rang a partir duquel v dépasse A ; v_n=3n^3-4n+2

def DM3_limite(A):
    n=1
    v=1
    while v<A:
        n=n+1
        v=3*n**3-4*n+2
    print("Le premier rang à partir duquel v_n dépasse", A, "est :", n)

DM3_limite(1000000)
```



   on trouve $3217 = 19 \times 169 + 6$ donc le quotient vaut 169 et le reste 6.
   on trouve encore :
$$-1273 = 17 \times (-75) + 2$$
   puis :
$$228 = -15 \times (-15) + 3$$
   et enfin :
$$-329 = -30 \times (11) + 1$$

2. Déterminer des entiers naturels a et b tels que leur somme soit égale à 283 et que dans la division de a par b, le quotient soit 5 et le reste 13.
   On a $a + b = 283 \iff a = 283 - b$ puis :
$$a = 5b + 13$$
   On en déduit que :
$$283 - b = 5b + 13 \iff 270 = 6b \iff b = \frac{270}{6} = 45$$
   Et par conséquent :
$$b = 283 - 45 = 238$$

3. n désigne un entier naturel.

(a) Réaliser la division de n^2+2n+2 par $n+3$ pour montrer que $n^2+2n+2=(n+3)(n-1)+5$.

$$
\begin{array}{rrr|l}
n^2 & +\,2n & +\,2 & n+3 \\ \cline{4-4}
-n^2 & -\,3n & & n-1 \\ \cline{1-2}
0\,- & n & +\,2 & \\
 & n & +\,3 & \\ \cline{2-3}
 & & 5 &
\end{array}
$$

On a ainsi :

$$n^2+2n+2=(n+3)(n-1)+5$$

(b) Déterminer les entiers naturels n tels que $\dfrac{n^2+2n+2}{n+3}\in\mathbb{N}$

$$\frac{n^2+2n+2}{n+3}\in\mathbb{N}\Longleftrightarrow n-1+\frac{5}{n+3}\in\mathbb{N}\Longleftrightarrow\frac{5}{n+3}\in\mathbb{N}$$

5 admet deux diviseurs positifs 1 et 5, par conséquent $\dfrac{5}{n+3}$ est un entier naturel si et seulement si, $n+3=1\Longleftrightarrow n=-2$ ou $n+3=5\Longleftrightarrow n=2$.

Il n'existe qu'un seul entier naturel n tel que $\dfrac{n^2+2n+2}{n+3}\in\mathbb{N}$, il s'agit de $n=2$.

4. Soit n un entier naturel non nul. Effectuer la division euclidienne de :

(a) $2n^2+n$ par $n+1$;
En procédant comme au début de ce même exercice on a : $2n^2+n=(n+1)(2n-1)+1$ est la division euclidienne des nombres $2n^2+n$ et $n+1$ si et seulement $0\leq 1<n+1$. n étant non nul, le reste est bien strictement inférieur au quotient.

(b) n^2+2n+3 par $n+2$
On a :

$$n^2+2n+3=(n+2)n+3$$

Le reste vaut 3 si et seulement si $n+2>3\Longleftrightarrow n>1$.
Pour $n=1$ on a :

$$n^2+2n+3=6 \qquad \text{et} \qquad n+2=3$$

et $6=3\times 2+0$.