∽ Correction du Devoir Maison 3 ∾
Divisibilité et division euclidienne

Vous traiterez au moins un exercice parmi les trois suivants.

Exercice 1. ♠♠

1. Le reste de la division euclidienne de l'entier naturel a par 18 est 13.
   Quel est le reste de la division euclidienne de a par 9 ? Par 6 ? Par 3 ?
   Il existe un entier relatif q tel que :
   $$a = 18q + 13 = 18q + 9 + 4 = 9(2q + 1) + 4$$
   On vient de trouver deux entiers relatifs $q' = 2q + 1$ et $r' = 4$ tels que :
   $$a = 9q' + r' \qquad \text{où } 0 \leq r' < 9$$
   Ce couple d'entier est unique donc le reste de la division euclidienne de a par 9 est 4.
   En procédant à l'identique on obtient :
   $$a = 18q + 13 = 18q + 12 + 1 = 6(3q + 2) + 1$$
   Le reste de la division euclidienne de 18 par 6 est 1.
   Enfin :
   $$a = 18q + 13 = 18q + 12 + 1 = 3(6q + 4) + 1$$
   De nouveau le reste de la division euclidienne de 18 par 3 est 1.
2. (a) Montrer que tout entier naturel n s'écrit nécessairement sous l'une des trois formes $3k$, $3k+1$ ou $3k+2$ avec $k \in \mathbb{N}$.
   Effectuons la division euclidienne de n par 3, d'après le cours il existe un unique couple d'entier (k, r) tel que :
   $$n = 3k + r \qquad \text{où } 0 \leq r < 3$$
   On a donc peu de choix pour le reste,
   - soit $r = 0$ dans ce cas $n = 3k$;
   - soit $r = 1$ dans ce cas $n = 3k + 1$;
   - soit $r = 2$ dans ce cas $n = 3k + 2$.

   (b) Montrer que dans la division euclidienne de $(n^2 + n)$ par 3 (où n désigne un entier quelconque), le reste n'est jamais égal à 1.
   Distinguons les trois cas observés dans la question précédente :
   - Si $n = 3k$, alors :
     $$n^2 + n = 9k^2 + 3k = 3(3k^2 + k)$$
     Dans ce cas 3 divise $n^2 + n$ et le reste de la division euclidienne de $n^2 + n$ par 3 vaut 0.
   - Si $n = 3k + 1$, alors :
     $$n^2 + n = (3k + 1)^2 + 3k + 1 = 9k^2 + 6k + 1 + 3k + 1 = 9k^2 + 9k + 2 = 3(3k^2 + 3k) + 2$$
     De l'unicité du couple $(quotient, reste)$ on tire de l'écriture précédente que le reste de $n^2 + n$ vaut 2.
   - Enfin si $n = 3k + 2$, alors :
     $$n^2 + n = (3k + 2)^2 + 3k + 2 = 9k^2 + 12k + 4 + 3k + 2 = 9k^2 + 15k + 6 = 3(3k^2 + 5k + 2)$$

2 divise n^2+n, par conséquent le reste de la division euclidienne de n^2+n par 3 vaut 0.

Ayant énuméré tous les cas possibles, aucun ne donnant un reste égal à 1 on peut conclure que le reste de la division euclidienne de n^2+n par 3 n'est jamais égal à 1.

<u>Exercice</u> 2. ♠♠♠

Pour n entier naturel non nul, on note M_n l'entier :

$$M_n = 2^n - 1$$

1. Pour $1 \leq n \leq 15$, quels sont les nombres M_n premiers ?

   Le programme en python suivant :

```python
#Nombre de Mersene
def premier(n):
    i=2
    test=1
    while i<=int(sqrt(n)):
        if n%i==0:
            test=0
        i+=1
    if test==1:
        print("le nombre", n, "est premier")
        return 1
    else:
        print("le nombre", n, "n'est pas premier")
        return 0

for i in range(1,16):
    M=2**i-1
    print("lorsque n=",i,"on a ")
    premier(M)
```

   donne les résultats que voici :

```
>>>
lorsque n= 1 on a
le nombre 1 est premier
lorsque n= 2 on a
le nombre 3 est premier
lorsque n= 3 on a
le nombre 7 est premier
lorsque n= 4 on a
le nombre 15 n'est pas premier
lorsque n= 5 on a
le nombre 31 est premier
lorsque n= 6 on a
le nombre 63 n'est pas premier
lorsque n= 7 on a
le nombre 127 est premier
lorsque n= 8 on a
le nombre 255 n'est pas premier
lorsque n= 9 on a
le nombre 511 n'est pas premier
lorsque n= 10 on a
le nombre 1023 n'est pas premier
lorsque n= 11 on a
le nombre 2047 n'est pas premier
lorsque n= 12 on a
le nombre 4095 n'est pas premier
lorsque n= 13 on a
le nombre 8191 est premier
lorsque n= 14 on a
le nombre 16383 n'est pas premier
lorsque n= 15 on a
le nombre 32767 n'est pas premier
```

2. (a) Soit k un entier naturel non nul et a un entier quelconque. Montrer que $a-1$ divise a^k-1 pour $a \neq 1$.
Indication : On utilisera un résultat sur les suites géométriques.
Considérons la suite géométrique u définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = a \times u_n$$

On a alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a^n$ et la somme des k premiers termes vaut (dans le cas où $a \neq 1$) :

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^{k-1} = \frac{1-a^k}{1-a} = \frac{a^k-1}{a-1}$$

Le nombre $\dfrac{a^k-1}{a-1}$ est donc entier dès que $a \neq 1$ ce qui prouve que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall a \in \mathbb{N} \text{ avec } a \neq 1 \text{ on a } a-1|a^k-1$$

(b) En déduire que, si d divise n, alors 2^d-1 divise M_n.
On applique le résultat précédent avec $a = 2^d$. Si d divise n, il existe un entier relatif k tel que $n = dk$, on a alors d'après la question précédente $a-1$ divise a^k-1, ce qui revient à dire que :

$$2^d-1|2^{d^k}-1 \iff 2^d-1|2^{dk}-1 \iff 2^d-1|2^n-1 \iff 2^d-1|\mathrm{M}_n$$

3. Déduire de la question 2. que, si M_n est premier, alors n est premier. La réciproque est-elle vraie ?
Raisonnons par l'absurde et supposons que M_n soit premier tandis n non. Puisque n n'est pas premier, il existe

deux entiers relatifs $d \neq \pm 1$ et $k \neq \pm 1$ tels que $n = dk$. D'après la question précédente :

$$2^d - 1 | \mathrm{M}_n$$

Comme $2^d - 1 \neq \pm 1$ cela signifie que M_n n'est pas premier, ce qui absurde.
Ainsi si M_n est premier alors n est premier.
Enfin dans le cas $n = 11$ (cas où n est premier) on a montré dans la question 1 que M_{11} n'était pas premier, on peut donc en conclure que :

$$n \text{ premier n'implique pas } \mathrm{M}_n \text{ premier}$$

La réciproque est donc fausse.

<u>Exercice</u> 3. ♠♠♠

Ecrire un algorithme qui pour deux entiers données a et b affiche le reste de la division euclidienne de a par b.

Cette question sous-entends qu'il ne faut pas utiliser l'instruction reste déjà existante dans la plupart des langages informatiques.

```
#donnant le reste de la division de a par b
def reste(a,b):
    if b>a and a>0:
        return a
    elif b<=a and a>0:
        while abs(b)<=a:
            a-=abs(b)
        return a
    elif a<0:
        while a<0:
            a+=abs(b)
        return a

a=-23
b=5
r=reste(a,b)
q=(a-r)/b
print("le reste de la division euclidienne de", a, "par", b, "vaut", r,
      "et le quotient vaut ", q)
```