∽ CORRECTION DU DEVOIR MAISON 2 ∾
RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

Vous traiterez au choix deux exercices parmi les cinq suivants.

Exercice 1. ♠

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$$

Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n \leq 2$$

Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathscr{P}(n) : 0 < u_n \leq 2$$

– ***Initialisation*** : Pour $n = 0$ on a $u_0 = 1$ et 1 est bien compris entre 0 et 2. Ainsi $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

– ***Hérédité*** : On suppose qu'il existe un entier naturel n tel que $0 < u_n \leq 2$ et on veut démontrer que :

$$0 < u_{n+1} \leq 2$$

On a la série d'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} & 0 < u_n \leq 2 \\ \iff & 0 < 2u_n \leq 4 \\ \iff & 0 < \sqrt{2u_n} \leq \sqrt{4} = 2 \\ \iff & 0 < u_{n+1} \leq 2 \end{aligned}$$

Ainsi dès lors que la propriété est vraie au rang n elle l'est au rang $n+1$, cette propriété est donc héréditaire.

– ***Conclusion*** : La propriété $\mathscr{P}$ est initialisée à partir de $n = 0$ et est héréditaire on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : 0 < u_n \leq 2$$

Exercice 2. ♠

On considère la suite v définie pour tout entier naturel n par :

$$v_0 = 0 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = v_n + 2n + 1$$

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite v, puis conjecturer l'expression de v_n en fonction de n.
   $v_0 = 0$ d'après l'énonce... ; $v_1 = v_0 + 2 \times 0 + 1 = 0 + 1 = 1$; $v_2 = v_1 + 2 \times 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 4$; $v_3 = v_2 + 2 \times 2 + 1 = 4 + 4 + 1 = 9$ et enfin $v_4 = v_3 + 2 \times 3 + 1 = 9 + 6 + 1 = 16$
   Il semble que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = n^2$$

2. Démontrer par récurrence votre conjecture émise à la question 1.
   Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété, pour $n \in \mathbb{N}$:
   $$\mathscr{P}(n) : v_n = n^2$$
   – ***Initialisation*** : Pour $n = 0$ on a $v_0 = 0$ par définition et $0^2 = 0$, ainsi $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   – ***Hérédité*** : On suppose qu'il existe un entier naturel n tel que $v_n = n^2$ et on veut démontrer que :
   $$v_{n+1} = (n+1)^2$$
   Or,
   $$v_{n+1} = v_n + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$
   Ainsi dès lors que la propriété est vraie au rang n elle l'est au rang $n+1$, cette propriété est donc héréditaire.

– ***Conclusion*** : La propriété $\mathscr{P}$ est initialisée à partir de $n = 0$ et est héréditaire on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : v_n = n^2$$

Exercice 3. ♠♠

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{9}{6 - v_n} \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que :

$$0 < v_n < 3$$

Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathscr{P}(n) 0 < v_n < 3 :$$

– ***Initialisation*** : Pour $n = 0$ on a $v_0 = 1$ d'après l'énoncé et 1 est bien compris entre 0 et 3 donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

– ***Hérédité*** : On suppose qu'il existe un entier naturel n tel que $0 < v_n < 3$ et on veut démontrer que :

$$0 < v_{n+1} < 3$$

On a :

$$0 < v_n < 3 \Longleftrightarrow -3 < -v_n < 0 \Longleftrightarrow 3 < 6 - v_n < 6 \Longleftrightarrow \frac{1}{6} < \frac{1}{6 - v_n} > \frac{1}{3} \Longleftrightarrow \frac{9}{6} < \frac{9}{6 - v_n} < 3 \Longleftrightarrow \frac{3}{2} < v_{n+1} < 3$$

Or, comme $\dfrac{3}{2} > 0$ on en déduit que :

$$0 < vn + 1 < 3$$

Ainsi dès lors que la propriété est vraie au rang n elle l'est au rang $n + 1$, cette propriété est donc héréditaire.

– ***Conclusion*** : La propriété $\mathscr{P}$ est initialisée à partir de $n = 0$ et est héréditaire on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : 0 < v_n < 3$$

Exercice 4. ♠♠

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul on a [1] :

$$n! \geq 2^{n-1}$$

Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathscr{P}(n) : n! \geq 2^{n-1}$$

- ***Initialisation*** : Pour $n = 0$ on a d'une part $1! = 1$ et d'autre part $2^{1-1} = 2^0 = 1$, ainsi $1! = 2^{1-1}$, par conséquent $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- ***Hérédité*** : On suppose qu'il existe un entier naturel non nul n tel que $n! \geq 2^{n-1}$ et on veut démontrer que :

  $$(n+1)! \geq 2^n$$

  Or $(n+1)! = (n+1) \times n!$ et puisque on a supposé que $n! \geq 2^{n-1}$ on a :

  $$(n+1)! = (n+1) \times n! \geq (n+1) \times 2^{n-1}$$

  Puisque n est un entier non nul on a $n+1 \geq 2$ ce qui donne :

  $$(n+1)! \geq (n+1) \times 2^{n-1} \geq 2 \times 2^{n-1} = 2^n$$

  Ainsi dès lors que la propriété est vraie au rang n elle l'est au rang $n+1$, cette propriété est donc héréditaire.
- ***Conclusion*** : La propriété $\mathscr{P}$ est initialisée à partir de $n = 1$ et est héréditaire on en déduit que :

  $$\forall n \in \mathbb{N}^* : n! \geq 2^{n-1}$$

1. On rappelle que $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$

Exercice 5. ♠♠♠♠

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n > 4$ on a :

$$2^n > n^2$$

Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété, pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n > 4$:

$$\mathscr{P}(n) : 2^n > n^2$$

- ***Initialisation*** : Pour $n = 5$ on a d'une part $2^5 = 32$ et d'autre part $5^2 = 25$, effectivement $32 > 25$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- ***Hérédité*** : On suppose qu'il existe un entier naturel $n > 4$ tel que $2^n > n^2$ et on veut démontrer que :

  $$2^{n+1} > (n+1)^2$$

  Or $2^{n+1} = 2 \times 2^n$ d'où :

  $$2^{n+1} > 2 \times n^2 = 2n^2$$

  Il faut encore démontrer que $2n^2 \geq (n+1)^2$ i.e que $2n^2 \geq n^2 + 2n + 1$ i.e que $2n^2 - n^2 - 2n - 1 \geq 0 \Longleftrightarrow n^2 - 2n - 1 \geq 0$

  Notons Q le polynôme définie par $Q(n) = n^2 - 2n - 1$ et établissons son tableau de signe.

  $\Delta = b^2 - 4ac = 4 + 4 = 8$, ce polynôme admet donc deux racines réelles :

  $$n_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2} < 0 \qquad \text{et} \qquad n_2 = 1 + \sqrt{2}$$

  Le tableau de signe de Q est alors le suivant :

n	$-\infty$		n_1		n_2		$+\infty$
$Q(n)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

  Dès lors que $n > 1 + \sqrt{2} \simeq 2,4$ on a $Q(n) > 0$. Par conséquent pour tout nombre entier n strictement supérieur à 4 on a :

  $$n^2 - 2n - 1 > 0 \Longrightarrow 2n^2 > (n+1)^2$$

  On avait démontré que

  $$2^{n+1} > 2n^2$$

  On en déduit que :

  $$2^{n+1} > (n+1)^2$$

  Ainsi dès lors que la propriété est vraie au rang n elle l'est au rang $n+1$, cette propriété est donc héréditaire.
- ***Conclusion*** : La propriété $\mathscr{P}$ est initialisée à partir de $n = 5$ et est héréditaire on en déduit que :

  $$\forall n \in \mathbb{N} \quad \text{avec } n > 4 : 2^n > n^2$$