

~ CORRECTION DU DEVOIR MAISON 2 ~

DIVISIBILITÉ

Exercice 1.

Soit n un entier différent de -4 . On souhaite montrer que $\frac{5n+21}{n+4}$ est une fraction irréductible.

1. Montrer que si un entier k divise simultanément $n+4$ et $5n+21$ alors $k = -1$ ou $k = 1$.

Si k divise simultanément $n+4$ et $5n+21$ alors il divise aussi tout nombre de la forme :

$$u(n+4) + v(5n+21)$$

où u et v désignent des entiers relatifs.

En choisissant $u = 5$ et $v = -1$, k divise en particulier $5(n+4) - (5n+21) = 20 - 21 = -1$.

k divise donc -1 , ce qui prouve que

$$k = \pm 1$$

2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fraction $\frac{5n+21}{n+4}$ est irréductible.

Si la fraction est réductible il existe un entier naturel $k > 1$ qui divise simultanément $5n+21$ et $n+4$.

D'après la première question $k = 1$ ce qui est absurde donc la fraction est irréductible.

Exercice 2.

Déterminer tous les couples (a, b) d'entiers relatifs tels que $4a^2 - b^2 = 27$.

On cherche donc les couples (a, b) d'entiers relatifs tels que :

$$4a^2 - b^2 = 27 \iff (2a-b)(2a+b) = 27$$

Les entiers a et b sont alors tels que $2a \pm b$ divise 27.

Listons les diviseurs de 27 :

$$\mathcal{D}(27) = \{-27; -9; -3; -1; 1; 3; 9; 27\}$$

Comme $(2a-b)(2a+b) = 27$ on a :

$$\begin{cases} 2a-b=27 \\ 2a+b=1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a-b=27 \\ 4a=28 \rightarrow a=7 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a-b=27 \rightarrow b=-13 \\ a=7 \end{cases}$$

Un premier couple solution est donc $(7; -13)$, mais on peut aussi avoir :

$$\begin{cases} 2a-b=9 \\ 2a+b=3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a-b=9 \\ 4a=12 \rightarrow a=3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a-b=9 \rightarrow b=-3 \\ a=3 \end{cases}$$

Un autre couple solution est donc $(3; -3)$ mais on peut aussi avoir :

$$\begin{cases} 2a-b=3 \\ 2a+b=9 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a-b=3 \\ 4a=12 \rightarrow a=3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a-b=3 \rightarrow b=3 \\ a=3 \end{cases}$$

Un autre couple solution est donc $(3; 3)$ mais on peut aussi avoir :

$$\begin{cases} 2a-b=1 \\ 2a+b=27 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a-b=1 \\ 4a=28 \rightarrow a=7 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a-b=1 \rightarrow b=13 \\ a=7 \end{cases}$$

Un autre couple solution est donc (7; 13) mais on peut aussi avoir :

$$\begin{cases} 2a - b = -1 \\ 2a + b = -27 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a - b = -1 \\ 4a = -28 \rightarrow a = -7 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a - b = -1 \rightarrow b = -13 \\ a = -7 \end{cases}$$

Un autre couple solution est donc (-7; -13) mais on peut aussi avoir :

$$\begin{cases} 2a - b = -3 \\ 2a + b = -9 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a - b = -3 \\ 4a = -12 \rightarrow a = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a - b = -3 \rightarrow b = -3 \\ a = -3 \end{cases}$$

Un autre couple solution est donc (-3; -3) mais on peut aussi avoir :

$$\begin{cases} 2a - b = -9 \\ 2a + b = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a - b = -9 \\ 4a = -12 \rightarrow a = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a - b = -9 \rightarrow b = 3 \\ a = -3 \end{cases}$$

Un autre couple solution est donc (-3; 3) mais on peut aussi avoir :

$$\begin{cases} 2a - b = -27 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a - b = -27 \\ 4a = -28 \rightarrow a = -7 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a - b = -27 \rightarrow b = 13 \\ a = -7 \end{cases}$$

Un dernier couple solution est donc (-7; 13). Pour résumer l'ensemble des 8 couples solutions est :

$$\mathcal{S} = \{(\pm 3, \pm 3); (\pm 7, \pm 13)\}$$