Correction du devoir maison 2 : Fonctions

Ce devoir maison de révisions, de préparation au DS2 comporte deux exercices. Vous traiterez au choix au moins un exercice parmi les deux suivants.

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 + x + 3$$

La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de cette fonction est donnée au dos.

1. En faisant apparaître les traits de construction, utiliser le graphique pour :

   (a) Donner l'image de 0, l'image de 1 et l'image de $\sqrt{2}$.
   L'image de 0 est 3 ; celle de 1 est environ 5 et enfin celle de $\sqrt{2}$ est environ $8,4$.

   (b) Donner le (ou les) antécédent(s) de 3 par f.
   3 a deux antécédents qui sont 0 et $-0,5$.

   (c) Dresser le tableau de signe de $f(x)$.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$+$

   $\mathscr{C}_f$ est au dessus de l'axe des abscisses donc $f(x) > 0$.

2. Dans cette question, il s'agit de justifier les résultats à l'aide de calculs.

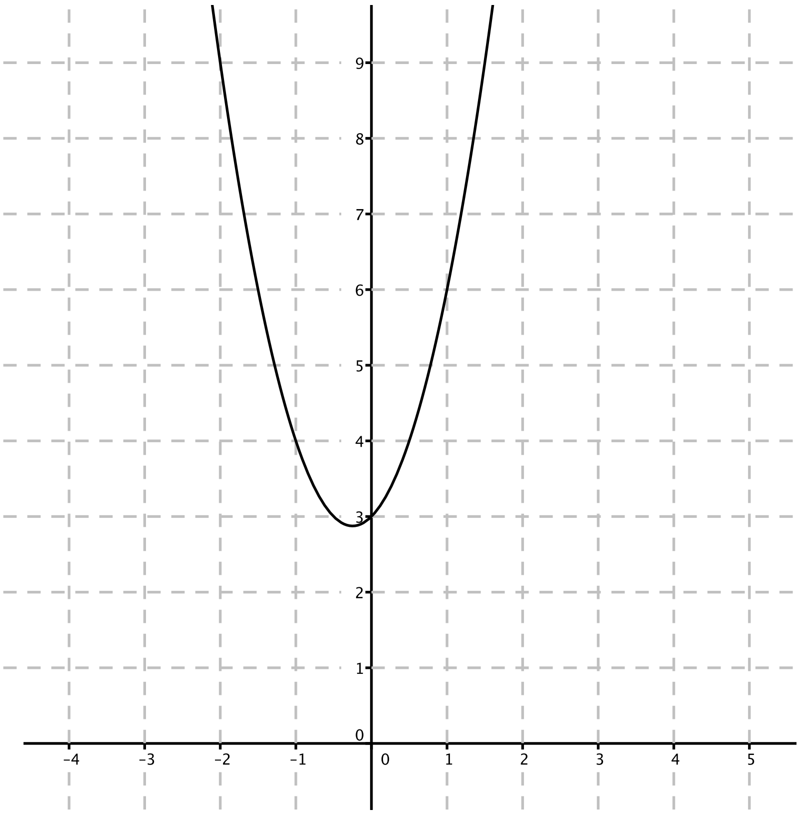
   (a) Calculer l'image de 0, l'image de 1 et celle de $\sqrt{2}$.
   $f(0) = 2 \times 0^2 + 0 + 3 = 3$ puis $f(1) = 2 + 1 + 3 = 6$ et enfin :

$$f\left(\sqrt{2}\right) = 4 + \sqrt{2} + 3 = 7 + \sqrt{2}$$

   (b) Calculer le (ou les) antécédent(s) de 3 par f.
   On cherche les réels x tels que $f(x) = 3$ c'est-à-dire tels que :

$$f(x) = 3 \Longleftrightarrow 2x^2 + x + 3 = 3 \Longleftrightarrow 2x^2 + x = 0 \Longleftrightarrow x(2x + 1) = 0$$

   Cette équation produit nul admet deux solutions $x = 0$ et la solution de l'équation $2x + 1 = 0 \Longleftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$.
   Ainsi 3 admet deux antécédents 0 et $-\dfrac{1}{2}$.



Exercice 2.

1. La question (*a*) ci-dessous est utile pour résoudre l'équation de la question (*b*).

   (a) Développer $(x-1)^2(x+2)$.
   Pour tout réel x on a :

   $$(x-1)^2(x+2) = (x^2-2x+1)(x+2) = x^3+2x^2-2x^2-4x+x+2 = x^3-3x+2$$

   (b) Résoudre l'équation $x^3-3x+2=0$.
   L'équation $x^3-3x+2=0$ équivaut à $(x-1)^2(x+2)=0$. Cette équation produit nul admet deux solutions :

   $$(x-1)^2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad x+2=0$$

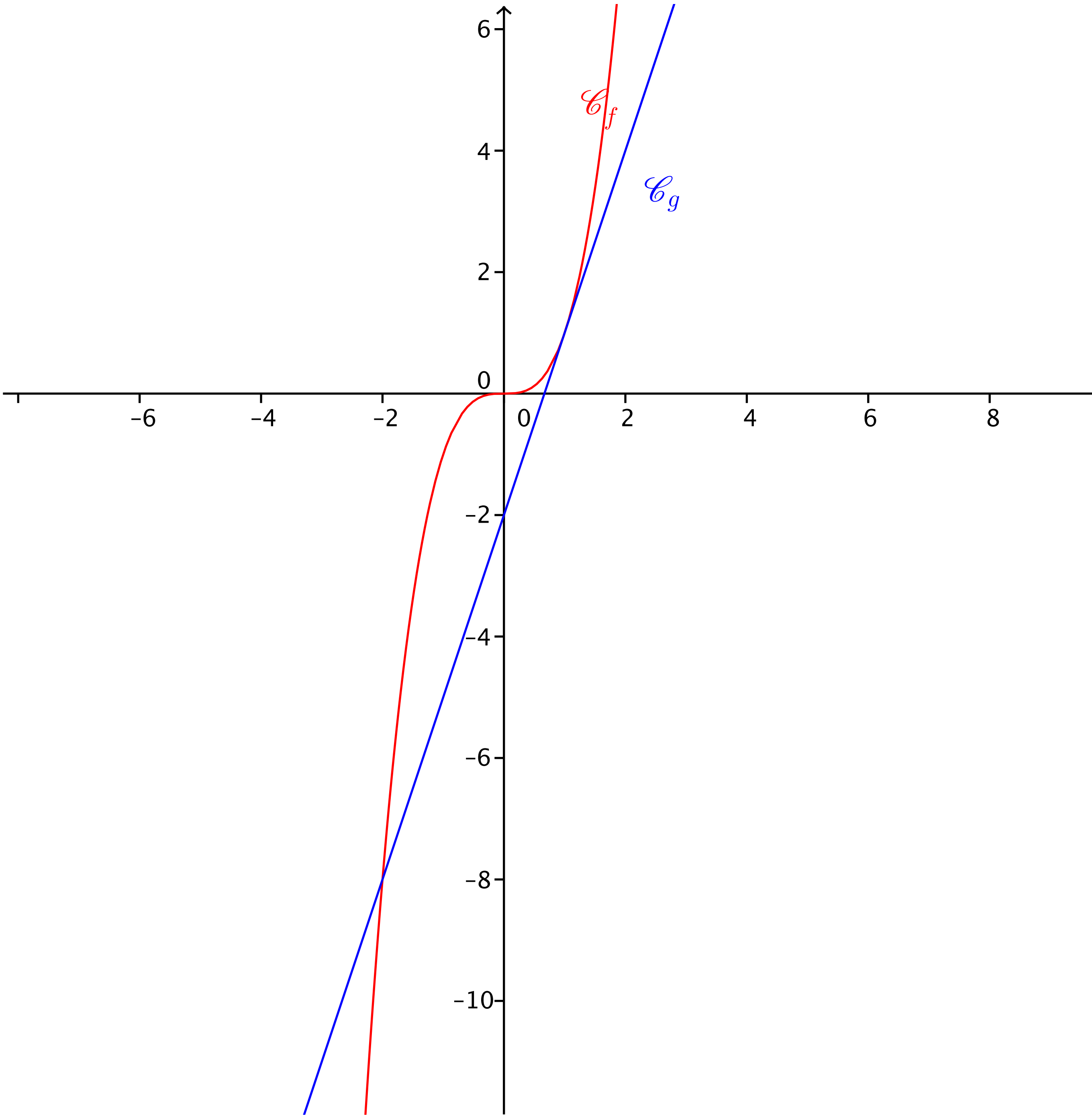
   c'est-à-dire :

   $$x=1 \qquad \text{ou} \qquad x=-2$$

2. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

   $$f(x) = x^3 \qquad \text{et} \qquad g(x) = 3x-2$$

   (a) Tracer soigneusement les représentations graphiques $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de f et g sur l'intervalle $[-2;2]$.



(b) Déterminer graphiquement les coordonnées des points communs de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
Ces deux courbes ont deux points communs, il ont pour coordonnées $A(1;1)$ et $B(-2;-8)$.

3. A l'aide de la question 1. retrouver ce résultat par calcul.
On cherche x tels que $f(x) = g(x) \iff x^3 = 3x - 2 \iff x^3 - 3x + 2 = 0$. Cette équation admet deux solutions d'après la question 1, $x = 1$ et $x = -2$.
Les ordonnées se trouvent en calculant leurs images :
$g(1) = 3 - 2 = 1$ et $g(-2) = -6 - 2 = -8$

4. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq 1$.
$f(x) \leq 1 \iff x \leq 1$.