∽ CORRECTION DEVOIR MAISON 23 ∽
FONCTIONS

Exercice 1. f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et f' est la fonction dérivée de la fonction f.

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on nomme $\mathscr{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathscr{C}_2$ la courbe représentative de la fonction f' ; A $(0\ ;\ 2) \in \mathscr{C}_1$ et B $(0\ ;\ 1) \in \mathscr{C}_2$.

1. La fonction f est décroissante puis croissante, donc la fonction dérivée doit être négative puis positive, ce qui élimine la situation 3.
   Si la fonction dérivée est représentée par une droite comme dans la situation 2, c'est que la fonction f est une fonction du second degré ; donc sa représentation graphique possède un axe de symétrie vertical. Ce n'est pas le cas donc on peut éliminer la situation 2.
   La bonne situation est donc la situation 1.
2. La droite Δ tangente à la courbe $\mathscr{C}_1$ en A d'abscisse 0, a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$.
   $f(0)$ est l'ordonnée de A donc $f(0) = 2$; $f'(0)$ est l'ordonnée du point B donc $f'(0) = 1$.
   L'équation réduite de la tangente est donc : $y = x + 2$.
3. On sait que pour tout réel x, $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + ax + b$ où a et b sont deux nombres réels.
   (a) $f(0) = 2 \iff \mathrm{e}^0 + 2 \times 0 + b = 2 \iff 1 + b = 2 \iff b = 1$
   (b) $b = 2$ donc $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + ax + 1$ donc
   $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + a$; or $f'(0) = 1 \iff -\mathrm{e}^0 + a = 1 \iff 1 + a = 1 \iff a = 2$
   Donc $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + 2x + 1$
4. On a vu que $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + a$ et comme $a = 2$, $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + 2$.
   $f'(x) > 0 \iff -\mathrm{e}^{-x} + 2 > 0 \iff 2 > \mathrm{e}^{-x} \iff \ln 2 > -x \iff -\ln 2 < x$

   Donc :
   - la fonction f est strictement décroissante sur $[-\infty\,; -\ln 2]$;
   - la fonction f admet un minimum pour $x = -\ln 2$;
   - la fonction f est strictement croissante sur $[-\ln 2\,; +\infty[$.
5. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x + 1 = +\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - (x+2)$.

1. (a) $g'(x) = f'(x) - 1 = -\mathrm{e}^{-x} + 2 - 1 = -\mathrm{e}^{-x} + 1$.
   $g'(x) > 0 \iff -\mathrm{e}^{-x} + 1 > 0 \iff 1 > \mathrm{e}^{-x} \iff \ln 1 > -x \iff x > 0$
   Donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$, et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$; la fonction g admet donc un minimum en $x = 0$. Ce minimum vaut $g(0) = f(0) - (0+2) = 2 - 2 = 0$.
   (b) D'après la question précédente, pour tout réel x : $g(x) \geq 0$ donc $f(x) - (x+2) \geq 0 \iff f(x) \geq x + 2$ ce qui veut dire que la courbe $\mathscr{C}_1$ est au-dessus de la droite Δ sur $\mathbb{R}$.
2. On a vu que la courbe $\mathscr{C}_1$ était au dessus de la droite Δ sur $\mathbb{R}$ donc c'est vrai sur $[-2\,;2]$.
   De plus, la courbe $\mathscr{C}_1$ et la droite Δ sont toutes les deux au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[-2\,;2]$.
   L'aire de la partie grisée est égale à la différence de l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_1$ entre $x = -2$ et $x = 2$, et l'aire sous la droite entre $x = -2$ et $x = 2$.
   Autrement dit cette aire est égale à $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\underset{\cdot}{x} - \int_{-2}^{2} (x+2)\underset{\cdot}{x} = \int_{-2}^{2} f(x) - (x+2)\underset{\cdot}{x} = \int_{-2}^{2} g(x)\underset{\cdot}{x}$
   $g(x) = \mathrm{e}^{-x} + 2x + 1 - x - 2 = \mathrm{e}^{-x} + x - 1$;
   donc g a pour primitive la fonction G telle que $\mathrm{G}(x) = -\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{x^2}{2} - x$.
   $$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} g(x)\underset{\cdot}{x} = \mathrm{G}(2) - \mathrm{G}(-2) = \left[-\mathrm{e}^{-x} + \frac{x^2}{2} - x\right]_{-2}^{2} &= \left(-\mathrm{e}^{-2} + \frac{2^2}{2} - 2\right) - \left(-\mathrm{e}^{-(-2)} + \frac{(-2)^2}{2} - (-2)\right)\\ &= -\mathrm{e}^{-2} + 2 - 2 + \mathrm{e}^2 - 2 - 2 = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-2} - 4\\ &\approx 3{,}25 \text{ unités d'aire.}\end{aligned}$$