☙ Correction Devoir Maison 21 ❧
Espace

Exercice 1. Dans le repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ de l'espace, on considère :

– les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ d'équations :

$$\mathscr{P} : x-y-z-2=0 \quad \text{et} \quad \mathscr{P}' : x+y+3z=0.$$

– la droite $\mathscr{D}$ ayant pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -3-2t \\ y & = & 2t \\ z & = & 1+2t \end{array}\right. \qquad t \in \mathbb{R}.$$

1. La droite $\mathscr{D}$ est-elle orthogonale au plan $\mathscr{P}$?
   La droite $\mathscr{D}$ est orthogonale au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est colinéaire à un vecteur normal de $\mathscr{P}$.
   Vérifions le... Un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est le vecteur $\vec{d}(-2;2;2)$ et un vecteur normal de $\mathscr{P}$ est $\vec{n}(1;-1;-1)$, on a bien $\vec{d}=-2\vec{n}$, on en déduit que $\mathscr{D}$ est orthogonale au plan $\mathscr{P}$.
2. (a) Montrer que les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants.
   $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants si et seulement si un vecteur normal de $\mathscr{P}$ est non colinéaires à un vecteur normal de $\mathscr{P}'$.
   Vérifions le... Un vecteur normal de $\mathscr{P}$ est $\vec{n}(1;-1;-2)$ et un vecteur normal de $\mathscr{P}'$ est $\vec{n}'(1;1;3)$. N'existant pas de réel k tels que $\vec{n}'=k\vec{n}$ on en déduit que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants en une droite visiblement appelée Δ.
   (b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ d'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.
   Soit $M(x;y;z)\in\Delta$ alors :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x-y-z-2 & = & 0 \\ x+y+3z & = & 0 \end{array}\right.$$

   Posons $x=t$ puis exprimons x et y en fonction de t :

$$\left\{\begin{array}{lcl} t-y-z-2 & = & 0 \\ t+y+3z & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} y & = & t-2-z \\ t+y+3z & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} y & = & t-2-z \\ t+t-2-z+3z & = & 0 \end{array}\right.$$

   Au final :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & t-2-z \Longrightarrow y=t-2-1+t=2t-3 \\ 2z & = & 2-2t \Longrightarrow z=1-t \end{array}\right.$$

   Une représenta tion paramétrique de Δ est donc :

$$\Delta : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & t \\ y & = & 2t-3 \\ z & = & 1-t \end{array}\right. \qquad t\in\mathbb{R}$$

3. Etudier la position relative des droites $\mathscr{D}$ et Δ.
   $\vec{d}(-2;2;2)$ dirige $\mathscr{D}$ et $\vec{\delta}(1;2;-1)$ dirige Δ, de plus ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, on en déduit que $\mathscr{D}$ et Δ ne sont pas parallèles. Observons que :

$$\vec{d}\cdot\vec{\Delta}=-2+4-2=0$$

Il suit que $\mathscr{D}$ et Δ sont orthogonales. Mais sont-elles perpendiculaires c'est-à-dire sont-elles sécantes ? Pour le savoir il faut chercher l'éventuel point d'intersection des deux droites en résolvant :

$$\left\{\begin{array}{l} -3-2t=t' \\ 2t=2t'-3 \\ 1+2t=1-t' \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t'+2t=3 \\ 2t-2t'=-3 \\ 2t+t'=1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t'+2t=3 \\ 3t'=6 \Longrightarrow t'=2 \\ 2t+t'=1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2t=1 \Longrightarrow t=0,5 \\ t'=2 \\ 2t=-1 \Longrightarrow t=-0,5 \end{array}\right.$$

La paramètre t peut pas prendre deux valeurs différentes en même temps, il suit que le système n'admet aucune solution et donc que les droites $\mathscr{D}$ et Δ ne sont pas sécantes.

4. Déterminer l'équation de la sphère $\mathscr{S}$ de centre O et de rayon 2. $M(x;y;z) \in \mathscr{S} \Longleftrightarrow OM^2 = 4$ ce qui équivaut à :

$$\mathscr{S} : x^2+y^2+z^2=4$$

5. (a) Montrer que les points $A(0;0;-2)$, $B(2;0;0)$ et $C(0;-2;0)$ sont trois points non alignés.
   $\overrightarrow{AB}(2;0;2)$ et $\overrightarrow{AC}(0;-2;2)$ sont deux vecteurs non colinéaires, par conséquent les points A, B et C sont non alignés.

   (b) Vérifier que A, B et C sont trois points du plan $\mathscr{P}$.
   $\mathscr{P} : x-y-z-2=0$ et $A(0;0;-2)$. Les coordonnées de A satisfont-elles l'équation de $\mathscr{P}$?

$$0-0-(-2)-2=2-2=0$$

   Les coordonnées de A satisfont l'équation de $\mathscr{P}$ donc $A \in \mathscr{P}$.
   On procède de manière identique pour montrer que $B \in \mathscr{P}$ et $C \in \mathscr{P}$.

   (c) Vérifier que A, B et C sont trois points de la sphère $\mathscr{S}$.
   $\mathscr{S} : x^2+y^2+z^2=4$ et $A(0;0;-2)$. Les coordonnées de A satisfont-elles l'équation de $\mathscr{S}$?

$$0^2+0^2+(-2)^2=4$$

   Les coordonnées de A satisfont l'équation de $\mathscr{S}$ donc $A \in \mathscr{S}$.
   On procède de manière identique pour montrer que $B \in \mathscr{S}$ et $C \in \mathscr{S}$.

   (d) Quelle est la nature du triangle ABC ?
   $\overrightarrow{AB}(2;0;2)$ donc :

$$AB = \sqrt{2^2+0^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

   De même on montre que $AC = BC = AB = 2\sqrt{2}$ ce qui permet de conclure que le triangle ABC est équilatéral.

   (e) On note $\mathscr{C} = \mathscr{P} \cap \mathscr{S}$. Quelle est la nature de $\mathscr{C}$?
   L'intersection entre une sphère et un plan est soit :

   – un cercle.
   – un point.
   – l'ensemble vide.

   $\mathscr{C}$ contient au moins A, B et C donc $\mathscr{C}$ est nécessairement un cercle.

   (f) On admet que $\mathscr{C}$ est un cercle, déterminer les coordonnées du centre G de $\mathscr{C}$ et calculer son rayon.
   $\mathscr{C}$ est donc le cercle circonscrit du triangle ABC, son centre est donc le point d'intersection des médiatrices mais aussi des médianes puisque le triangle ABC est équilatéral, par conséquent le centre $\mathscr{C}$ est le centre de gravité du triangle ABC donc :

$$G\left(\frac{0+2+0}{3};\frac{0+0-2}{3};\frac{-2+0+0}{3}\right) \Longleftrightarrow G\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3};\frac{-2}{3}\right)$$

Le rayon r de $\mathscr{C}$ vaut AG. Or $\overrightarrow{\mathrm{AG}}\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$ d'où :

$$r = \mathrm{AG} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{4+4+16}}{3} = \frac{\sqrt{24}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$