∾ CORRECTION DU DEVOIR MAISON 19 ∾
INTÉGRATION

Dans ce devoir maison, il est obligatoire de traiter une page. Les élèves qui ont obtenu au bac blanc une note inférieure ou égale à 7 traiteront les exercices de la page 1, ce qui ont obtenu une note supérieure ou égale à 14 traiteront ceux de la page 2, les autres ont le choix.

Exercice 1. Soit $f(x) = \dfrac{x^2+5x-1}{x+2}$ pour $x \in]-2;+\infty[$.

1. Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \in]-2;+\infty[$:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$$

Pour tout $x > -2$ on a :

$$ax + b + \frac{c}{x+2} = \frac{(ax+b)(x+2)+c}{x+2} = \frac{ax^2+(2a+b)x+2b+c}{x+2}$$

Par conséquent en choisissant $a = 1$, b tel que $2a + b = 5$ et c tel que $2b + c = -1$ on obtientdra l'égalité désirée. On choisit $a = 1$, $b = 3$ et $c = -7$ et on a montré l'existence de trois réels a, b et c tels que :

$$f(x) = x + 3 - \frac{7}{x+2}$$

2. En déduire la primitive de f sur $]-2;+\infty[$ qui s'annule en 1.

On utilise la forme précédente pour déterminer une primitive de f.
On a $\displaystyle\int x + 3 dx = \frac{x^2}{2} + 3x$, enfin $-7 \times \dfrac{1}{x+2}$ est de la forme $-7 \times \dfrac{u'}{u}$, en conséquence une primitive est de la forme $-7\ln u$ i.e. $\displaystyle\int \frac{-7}{x+2} dx = -7\ln(x+2)$.
Pour $x > -2$ la fonction F définie par :

$$\mathrm{F}(x) = \frac{x^2}{2} + 3x - 7\ln(x+2) + c \qquad \text{où} c \in \mathbb{R}$$

est une primitive de f.
Déterminons c afin que $\mathrm{F}(1) = 0$:

$$\mathrm{F}(1) = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{2} + 3 - 7\ln(3) + c = 0 \Longleftrightarrow c = 7\ln(3) - \frac{7}{2}$$

La primitive de f sur $]-2;+\infty[$ qui s'annule en 1 est définie pour $x > -2$ par :

$$\mathrm{F}(x) = \frac{x^2}{2} + 3x - 7\ln(x+2) + 7\ln(3) - \frac{7}{2}$$

3. Montrer que pour $x > 1$ on a :

$$f(x) > 0$$

Indication : On pourra dresser le tableau de signe de $x^2 + 5x - 1$

Pour $x > 1$ on a $x + 2 > 3 > 0$ donc $f(x)$ est du signe du numérateur $x^2 + 5x - 1$. Or pour $x > 1$ $x^2 + 5x > 1 + 5 = 6$ donc $x^2 + 5x - 1 > 5 > 0$ donc pour $x > 1$, $f(x) > 0$.

4. Calculer l'aire du domaine $\mathscr{D}$ définit par :

$$\mathscr{D} = \{\mathrm{M}(x; y) \in \mathscr{P}, 1 \le x \le e \qquad \text{et} \qquad 0 \le y \le f(x)\}$$

Indication : Il s'agit de calculer $\int_1^e f(x)dx$.

$$\int_1^e f(x)dx = [\frac{x^2}{2}+3x-7\ln(x+2)]_1^e = \frac{e^2}{2}+3e-7\ln(e+2)-\frac{1}{2}-3+7\ln(3)u.a$$

5. L'unité sur l'axe des abscisses vaut 2 cm, celle sur l'axe des ordonnées 0.5 cm. Donner l'aire du domaine $\mathscr{D}$ en cm^2.
   En cm^2 1 unité d'aire vaut $0,5\times 2 = 1$ cm^2, il vient donc que :

$$\mathscr{D} = \frac{e^2}{2}+3e-7\ln(e+2)-\frac{1}{2}-3+7\ln(3)cm^2$$

Exercice 2. Calculer les intégrales proposées

1. $\int_1^3 t+\frac{1}{t}dt$ (interpréter le résultat graphiquement)

$$\int_1^3 t+\frac{1}{t}dt = \left[\frac{t^2}{2}+\ln(t)\right]_1^3 = \frac{9}{2}+\ln 3-\frac{1}{2}-\ln 1 = 4+\ln 3$$

   De plus si $t\in[1;3]$ alors $t>0$ et $\frac{1}{t}>0$ donc $\int_1^3 t+\frac{1}{t}dt$ est l'aire du domaine $\mathscr{D}$ définie par :

$$\mathscr{D} = \left\{\mathrm{M}(x;y)\in\mathscr{P}, 1\leq x\leq 3 \qquad \text{et} \qquad 0\leq y\leq x+\frac{1}{x}\right\}$$

2. $\int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{x+2}}$ (interpréter le résultat graphiquement) $\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$ est de la forme $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u = x+2$ donc une primitive est de la forme $\sqrt{u}$ d'où :

$$\int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{x+2}} = [\sqrt{x+2}]_0^1 = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

   Sur l'intervalle $[0;1]$, $\frac{1}{2\sqrt{x+2}}>0$ donc $\int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{x+2}}$ est l'aire du domaine $\mathscr{D}$ définie par :

$$\mathscr{D} = \left\{\mathrm{M}(x;y)\in\mathscr{P}, 1\leq x\leq 3 \qquad \text{et} \qquad 0\leq y\leq \frac{1}{2\sqrt{x+2}}\right\}$$

3. $\int_3^4 \frac{2x}{x^2-5}dx$ (interpréter le résultat graphiquement)
   $\frac{2x}{x^2-5}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u = x^2-5$ et donc $u' = 2x$ donc une primitive est de la forme $\ln(u)$, d'où en appliquant la formule de Newton Leibniz on obtient :

$$\int_3^4 \frac{2x}{x^2-5}dx = [\ln(x^2-5)]_3^4 = \ln(11)-\ln 4$$

   Sur l'intervalle $[3;4]$, il se trouve que $2x>0$ et que $x^2\geq 9 \Longrightarrow x^2-5>0$, par conséquent l'intégrale que l'on vient de calculer désigner de nouveau l'aire entre l'axe des abscisses, la représentation graphique de la fonction $x\longmapsto \frac{2x}{x^2-5}$ et les droites verticales d'équation $x=3$ et $x=4$.

4. $\int_0^1 te^{t^2}dt$ (interpréter le résultat graphiquement)
   $te^{t^2} = \frac{2te^{t^2}}{2}$ est de la forme $\frac{u'e^u}{2}$ donc une primitive est de la forme $\frac{e^u}{2}$, par conséquent d'après la formule de Newton Leibniz :

$$\int_0^1 te^{t^2}dt = \left[\frac{e^{t^2}}{2}\right]_0^1 = \frac{e}{2}-\frac{1}{2}$$

Sur l'intervalle $[0;1]$ $t \geq 0$ et $e^{t^2} > 0$ par conséquent l'intégrale que l'on vient de calculer désigner de nouveau l'aire entre l'axe des abscisses, la représentation graphique de la fonction $x \longmapsto xe^{x^2}$ et les droites verticales d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 3. Soit $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+4}{(x-1)^2}$ pour $x\in]1;+\infty[$.

1. Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que, pour tout $x\in]1;+\infty[$:

$$f(x)=a+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$$

On a :

$$a+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}=\frac{a(x-1)^2+b(x-1)+c}{(x-1)^2}=\frac{ax^2+(2a+b)x+c-a-b}{(x-1)^2}$$

Ainsi en choisissant $a=2$ puis b tel que $2a+b=-3$ i.e. $b=-7$ et enfin c tel que $c-a-b=4\iff c=4+2+7=13$ on obtient l'égalité suivante :

$$f(x)=2-\frac{7}{x-1}+\frac{13}{(x-1)^2}$$

ce qui démontre l'existence de trois réels a, b et c comme désiré.

2. En déduire la primitive de f sur $]1;+\infty[$ qui vaut 3 en 2.

Une primitive de 2 est $2x$, puis $-\dfrac{7}{x-1}=-7\times\dfrac{1}{x-1}$ est de la forme $-7\times\dfrac{u'}{u}$ donc une primitive est de la forme $-7\ln u$ et enfin $\dfrac{13}{(x-1)^2}=13\times\dfrac{1}{(x-1)^2}$ est de la forme $13\dfrac{v'}{v^2}$ donc une primitive est de la forme $-13\dfrac{1}{v}$, on en déduit que l'ensemble des primitives de la fonction f sur l'intervalle $]1;+\infty[$ est de la forme :

$$\mathrm{F}(x)=2x-7\ln(x-1)-\frac{13}{x-1}+c\qquad\text{où } c\in\mathbb{R}$$

Déterminons c pour que $\mathrm{F}(2)=0$:

$$\mathrm{F}(2)=0\iff 4-7\ln 1-\frac{13}{2}+c=0\iff 4-6,5+c=0\iff c=2,5=\frac{5}{2}$$

La primitive cherchée est donc la fonction F définie sur $]1;+\infty[$ par :

$$\mathrm{F}(x)=2x-7\ln(x-1)-\frac{13}{x-1}+\frac{5}{2}$$

3. Montrer que pour $x>1$ on a :

$$f(x)>0$$

Comme $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+4}{(x-1)^2}$ et comme $(x-1)^2>0$ pour $x>1$, $f(x)$ est du signe du numérateur. Étudions son signe.

$\Delta=9-32<0$ donc $2x^2-3x+4$ est de signe constant, ici de signe positif puisque $a=2>0$, donc $f(x)>0$ pour $x>1$.

4. Calculer l'aire du domaine $\mathscr{D}$ définit par :

$$\mathscr{D}=\{\mathrm{M}(x;y)\in\mathscr{P}, 1\leq x\leq e\qquad\text{et}\qquad 0\leq y\leq f(x)\}$$

$$\mathscr{A}(\mathscr{D})=\int_1^e f(x)dx=[\mathrm{F}(x)]_1^e=\mathrm{F}(e)-\mathrm{F}(1)=2e-7\ln(e-1)-\frac{13}{e-1}-2+\dots$$

La fonction F n'étant pas définie en 1 on est amené a calculer :

$$\lim_{t\to1^+}\int_t^e f(x)dx=\lim_{t\to1^+}[\mathrm{F}(x)]_t^e=\lim_{t\to1^+}\mathrm{F}(e)-\mathrm{F}(t)$$

Or :

$$\mathrm{F}(x)=2x-\frac{1}{x-1}(7(x-1)\ln(x-1)+13)+\frac{5}{2}$$

On sait d'après le cours que $\lim\limits_{x\to0}x\ln x=0$ donc : $\lim\limits_{t\to1^+}(t-1)\ln(t-1)=0\Longrightarrow\lim\limits_{t\to1^+}-7(t-1)\ln(t-1)+13=13$

$\lim_{t \to 1^+} -\frac{1}{t-1} = -\infty \Longrightarrow \lim_{t \to 1^+} -\frac{1}{t-1}(7(t-1)\ln(t-1)+13) = -\infty$
Au final $\lim_{t \to 1^+} \mathrm{F}(t) = -\infty$ et par conséquent :

$$\lim_{t \to 1^+} \mathrm{F}(e) - \mathrm{F}(t) = +\infty$$

En quelque sort l'aire du domaine $\mathscr{D}$ est infini.

5. L'unité sur l'axe des abscisses vaut 2 cm, celle sur l'axe des ordonnées 0.5 cm. Donner l'aire du domaine $\mathscr{D}$ en cm^2.
   L'aire du domaine $\mathscr{D}$ est infini en unité d'aire comme en cm^2.

Exercice 4.

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$.

PARTIE A.

La courbe $(\mathscr{C})$, donnée ci-dessous, est la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, de fonction dérivée f' continue sur $[0\,;\,+\infty[$.
La courbe $(\mathscr{C})$ passe par les points O et $\mathrm{A}\left(1\,;\,\frac{1}{2\mathrm{e}}\right)$ et, sur $[0\,;\,1]$, elle est au dessus du segment [OA].

1. Montrer que $\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\mathrm{e}}$

$$\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\mathrm{e}} = [f(x)]_0^1 = f(1) - f(0) = \frac{1}{2e} - 0 = \frac{1}{2e}$$

2. Montrer que $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{4\mathrm{e}}$
   Notons B le point de l'axe des abscisses de coordonnées $(1;0)$, puisque $\mathscr{C}$ est au dessus du segment [OA] alors :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \mathscr{A}(\mathrm{OAB})$$

Le triangle OAB est rectangle en B donc son aire vaut :

$$\frac{\mathrm{OB} \times \mathrm{BA}}{2} = \frac{1 \times \frac{1}{2e}}{2} = \frac{1}{4e}$$

d'où :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{4e}$$

PARTIE B.

On sait désormais que la fonction f considérée dans la partie A est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{x^2+1}.$$

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
   $xe^{-x} = \frac{x}{e^x}$ et on sait que $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ par conséquent : $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} x^2 + 1 = +\infty$, par quotient on obtient :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

$\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 0$.

2. On considère la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = x^3 + x^2 + x - 1$.
   Etablir que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   On a dans un premier temps $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ par somme de fonction dont la limite est $+\infty$ en $+\infty$.
   De plus pour $x \neq 0$ on a :

$$g(x) = x^3\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)$$

Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3} = 1$, par produit on obtient :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$$

Enfin g est une fonction polynôme donc dérivable et continue sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$g'(x) = 3x^2+2x+1$$

$\Delta = 4-12 < 0$ donc $g'(x) > 0$ et donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$, enfin g est à valeurs dans $\mathbb{R}$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.
De plus $g(0) = -1$ donc $\alpha \in [0;+\infty[$.

3. (a) Montrer que pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$, $f'(x)$ et $g(x)$ sont de signes contraires.

$$f'(x) = \frac{(xe^{-x})'(x^2+1)-(xe^{-x})2x}{(x^2+1)^2} = \frac{(e^{-x}+x\times(-e^{-x}))(x^2+1)-2x^2e^{-x})}{(x^2+1)^2} = \frac{(e^{-x}-xe^{-x})(x^2+1)-2x^2e^{-x}}{(x^2+1)^2}$$

c'est-à-dire :

$$f'(x) = \frac{x^2e^{-x}-x^3e^{-x}+e^{-x}-xe^{-x}-2x^2e^{-x}}{(x^2+1)^2} = \frac{-e^{-x}\left(x^3+x^2+x-1\right)}{(x^2+1)^2} = \frac{-e^{-x}g(x)}{(x^2+1)^2}$$

Etant donné que pour $x \geq 0$, on a $(x^2+1)^2 > 0$ et $e^{-x} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $-g(x)$ c'est-à-dire $f'(x)$ et $g(x)$ sont de signes contraires.

(b) En déduire les variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$.
g étant strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et $g(\alpha) = 0$, on en déduit son tableau de signe :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$f(\alpha)$	↘	0

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_n^{2n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(a) Montrer que pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$, $0 \leqslant \frac{x}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{2}$.
Il est clair que si $x \geq 0$ alors le quotient $\frac{x}{x^2+1} \geq 0$.
De plus :

$$\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{2} = \frac{2x-(x^2+1)}{2(x^2+1)} = \frac{-(x^2-2x+1)}{2(x^2+1)} = \frac{-(x-1)^2}{2(x^2+1)}$$

Pour $x \geq 0$ on a $(x-1)^2 \geq 0$ et $2(x^2+1) > 0$ donc le quotient $\frac{-(x-1)^2}{2(x^2+1)} \leq 0 \Longleftrightarrow \frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{2} \Longleftrightarrow \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$.
On a bien au final :

$$\forall x \geq 0, \qquad 0 \leq \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$$

(b) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-n} - \mathrm{e}^{-2n}\right)$. On vient de démontrer que :

$$\forall x \geq 0, \qquad 0 \leq \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$$

en multipliant par $e^{-x} > 0$ on obtient :

$$\forall x \geq 0, \qquad 0 \leq \frac{xe^{-x}}{x^2+1} \leq \frac{e^{-x}}{2}$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \geq 0, \qquad 0 \leq f(x) \leq \frac{e^{-x}}{2}$$

par passage à l'intégrale :

$$\forall x \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_n^{2n} 0 dx \leq u_n \leq \int_n^{2n} \frac{e^{-x}}{2} dx$$

Enfin comme $\int_n^{2n} 0 dx = 0$ et $\int_n^{2n} \frac{e^{-x}}{2} dx = \left[-\frac{e^{-x}}{2}\right]_n^{2n} = -\frac{e^{-2n}}{2} + \frac{e^{-n}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{-n} - e^{-2n}\right)$.
On en déduit donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}\left(e^{-n} - e^{-2n}\right)$$

(c) En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Lorsque n tend vers $+\infty$ e^{-n} tend vers 0 et de même e^{-2n} tend vers 0, par conséquent $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(e^{-n} - e^{-2n}\right) = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes on déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$