∾ Correction du Devoir Maison 17 ∾
Equation de Pell-Fermat

Le but de l'exercice est de déterminer des couples (a, b) d'entiers vérifiant l'égalité

$$(1) : a^2 - 2b^2 = 1$$

1. On suppose que (a, b) est solution.

   (a) Prouver que a est impair.

   Supposons que a soit pair alors $a \equiv 0(2)$ par conséquent $a^2 \equiv 0(2)$.
   De plus $a^2 - 2b^2 = 1 \iff a^2 - 1 = 2b^2$.
   Enfin $2b^2 \equiv 0(2)$ et puisque $a^2 \equiv 0(2)$ on a $a^2 - 1 \equiv -1(2)$, ce qui est absurde.
   Ainsi il est impossible que a soit pair, on en déduit que a est impair.

   (b) En déduire que $a^2 - 1$ est un multiple de 4 puis que b est pair.

   Puisque a est impair il existe un entier relatif k tel que $a = 2k + 1$, par conséquent :

   $$a^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4(k^2 + k)$$

   donc $4|a^2 - 1$ i.e. que $a^2 - 1$ est un multiple de 4.
   Or, $a^2 - 1 = 2b^2$ donc il existe un entier relatif k' tel que :

   $$2b^2 = 4k' \iff b^2 = 2k'$$

   Autrement dit b^2 est pair. Ceci implique que b est pair, en effet le carré d'un nombre impair est impair et seul le carré d'un nombre pair est pair.

   (c) Montrer que a et b sont premiers entre eux.

   Supposons que d divise simultanément a et b alors d divise toute combinaison linéaire de a et de b, en particulier d divise $a \times a - 2b \times b$ i.e. d divise 1, il vient que les seuls diviseur commun de a et b sont les diviseurs de 1 i.e. 1 et -1, par conséquent a et b sont premiers entre eux.

2. (a) Déterminer une solution évidente de l'équation (1).

   On sait que a est impair et que b est pair, de plus $a^2 - 1$ est un multiple de 4 et enfin $a \wedge b = 1$, les plus petits candidats sont donc :

   $$a = 3 \qquad \text{et} \qquad b = 2$$

   Vérifions :

   $$a^2 - 2b^2 = 9 - 2 \times 4 = 1$$

   Nous avons trouvé une solution évidente. Une autre est le couple $a = 1$ et $b = 0$.

   (b) Montrer que si (a, b) est solution de (1), le couple $(3a + 4b, 2a + 3b)$ l'est également.

   Si (a, b) est solution de (1) alors :

   $$a^2 - 2b^2 = 1$$

   De plus :

   $$(3a + 4b)^2 - 2(2a + 3b)^2 = 9a^2 + 24ab + 16b^2 - 2(4a^2 + 12ab + 9b^2) = a^2 - 2b^2$$

   ce qui vaut 1 puisque (a, b) est solution de (1) et ce qui prouve donc que le couple $(3a + 4b, 2a + 3b)$ est solution de (1).

   (c) Déterminer 3 autres solutions de (1).

   De la question précédente on tire plusieurs couple solution :

   $$(17, 12) \qquad \text{puis} \qquad (99, 70) \qquad \text{et enfin} \qquad (577, 408)$$

3. (a) Ecrire un algorithme qui affiche un couple d'entiers supérieurs à 1000 vérifiant (1).

Algorithme 1 :

Données: ℓ est un nombre réel positif.
a et b sont deux nombres entiers.
Saisir ℓ.
$a = 1$
$b = 0$ **Tant que** ($a \leq \ell$ OU $b \leq \ell$) **Faire**
  $c := a$
  $a := 3c + 4b$
  $b := 2c + 3b$
Fin Tant que
Si $(a^2 - 2b^2 = 1)$ **Alors**
  Afficher le couple (a, b)
Sinon
  Afficher Erreur
Fin Si

(b) Le programmer sur une calculatrice ou sur un logiciel de votre choix.
Quel couple affiche-t-il ?
Il affiche le couple $(3363, 2378)$

Infos Mathématiques

L'équation $a^2 - 2b^2 = 1$ est dite de « Pell-Fermat ». Plus généralement, on appelle ainsi une équation de la forme $x^2 - dy^2 = 1$ où x et y sont des entiers inconnus et d un entier naturel sans facteur carré.
Fermat a montré qu'elle admet une infinité de solutions.